Feuille 2 : dérivabilité, th. de Rolle et des accroissements finis, étude des variations

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués $(**)$ peuvent être considérés comme des « compléments de cours » mais certains peuvent aussi être traités comme apportant un autre éclairage sur des notions vues en cours ou des exercices précédents. Toutefois, les évaluations ne comporteront pas d'exercices du type $(**)$. [1]

Exercice 1. On dispose d'une plaque de carton carrée, de côté de longueur L. On découpe dans chaque coin un carré de côté x, obtenant ainsi une forme de croix, puis on plie vers le haut chacun des quatre côtés, afin d'obtenir une boîte sans couvercle.

1. Exprimer en fonction de L et x le volume $V(x)$ de la boîte.
2. Sans développer $V(x)$ et en utilisant des formules connues pour la dérivée d'un produit ou d'une composée de fonctions, déterminer pour quelle valeur de x ce volume est maximal.

Exercice 2 ($\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)/x = 1$ et dérivabilité de sin et cos)**.** Dessiner un cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1, placer le point I correspondant à l'angle $\theta = 0$ et placer un point M correspondant à un angle $x \in]0, \pi/2[$ fixé (en particulier $x > 0$). Soit H le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente au cercle au point I. Comme x est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ et comme le plus court chemin entre I et M est le segment $[I, M]$, on sait (ou l'on *admet*) que $x \geq IM$ (on note IM la longueur du segment $[I, M]$).

1. Déterminer IM^2 puis IM, puis montrer que $0 < \sin(x) < IM < x$.
2. Montrer que la longueur IH vaut $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Déterminer alors la surface du triangle OHI.

On admet que la surface de la portion de disque (« part de gâteau » si on veut) déterminée par OI et OM est $(x/2\pi) \times \pi = x/2$.

3. En déduire que $\sin(x) < x < \tan(x)$.
4. Déduire de ce qui précède que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sin(x)} = 1$.
5. En utilisant que la fonction sin est *impaire*, montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(x)} = 1$.
6. Montrer que la fonction sin est dérivable en 0 et déterminer $\sin'(0)$.
7. Reprenant la valeur de IM^2, montrer que $0 < \dfrac{1-\cos(x)}{x} < \dfrac{x}{2}$.
8. Montrer que la fonction cos est dérivable en 0 et déterminer $\cos'(0)$.
9. Écrire les formules trigonométriques $\sin(a + h) = \cdots$ et $\cos(a + h) = \cdots$ puis, en utilisant les questions précédentes, montrer que sin (resp. cos) est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée cos (resp. $-\sin$).
10. (Optionnel) Déduire le calcul de $\cos'(0)$ de la formule $1 - \cos(x) = \ldots$ et de la question 5.
11. Déterminer le domaine de définition D de la fonction $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, calculer sa dérivée et montrer que $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$. Montrer aussi que $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ pour tout $x \in D$. Étudier les variations et dessiner le graphe de la fonction $]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x)$.

Exercice 3 (Dérivée de $x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$)**.** Soit n un entier ≥ 2.

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer la fonction dérivée f'. Montrer aussi que f n'est pas dérivable à droite en 0.
2. Montrer que $y^n - b^n = (y - b)(y^{n-1} + y^{n-2}b + \cdots + yb^{n-2} + b^{n-1})$, pour tout $b, y \in \mathbb{R}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant l'égalité précédente pour b et y bien choisis, montrer que la fonction $f(x) = \sqrt[n]{x}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer la fonction dérivée f'. Montrer aussi que f n'est pas dérivable à droite en 0.

[1] Version du 8/10/13 avec corrections dans 7.1, 7.2, 11.2 et exo 6 détaillé.

Exercice 4 (Applications $I \to \mathbb{R}$ continues et injectives)**.** $(*)$ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et *injective* (i.e. $f(x) \neq f(x')$ si $x \neq x'$). Le but de l'exercice est de montrer que f est ou bien strictement croissante ou bien strictement décroissante. Soient $x_0 < x_1 < x_2$ dans I et supposons par exemple que $f(x_1) < f(x_2)$. On considère les intervalles $I_+^* = I \cap]x_1, +\infty[$ et $I_-^* = I \cap] - \infty, x_1[$.

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer $f(x) - f(x_1) > 0$ pour tout $x \in I_+^*$.
2. En déduire que $f([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(x_2)]$.

Pour montrer que $f(x_0) < f(x_1)$ on va raisonner par l'absurde. Supposons donc que $f(x_0) > f(x_1)$.

3. Montrer alors, en procédant comme précédemment, que $f([x_0, x_1]) = [f(x_1), f(x_0)]$.
4. En déduire que f n'est pas injective. Indication : considérer par exemple $m = \min(f(x_0), f(x_2))$.
5. Déduire de la contradiction précédente que f est strictement croissante.

Exercice 5 (Théorème de Rolle et polynômes)**.** On dit qu'un polynôme $Q(x)$ est de *degré* $d \in \mathbb{N}$ s'il s'écrit $Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_d x^d$ avec $b_d \neq 0$. On considère un polynôme P de degré $n \geq 1$, disons $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

1. Citer des résultats qui assurent que P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer le polynôme dérivé $P'(x)$. Quel est son degré ?
2. En utilisant le théorème de Rolle, montrer par récurrence sur n que l'équation $P(x) = 0$ a au plus n solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (Règle de L'Hôpital et applications)**.** Soit I un intervalle ouvert $\neq \varnothing$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables sur I. On suppose de plus que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

1. Montrer que pour tout $a < b$ dans I, on a $g(b) \neq g(a)$. (Utiliser le th. de Rolle.)
2. Fixons $a < b$ dans I. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Indication : utiliser le th. de Rolle pour l'application $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.
3. $(*)$ Fixons $a \in I$. Déduire de la question précédente que si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe et vaut $\ell \in \mathbb{R}$, alors
$$\lim_{\substack{b \to a \\ \neq}} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \ell.$$

On rappelle (*cf.* Exo 2) que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et que la fonction sin (resp. cos) est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée cos (resp. $-\sin$).

4. En utilisant la question 3, déterminer $a_2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$, puis $a_3 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$, puis
$$a_4 = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1 - a_2 x^2}{x^4} \qquad \text{et} \qquad a_5 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x - a_3 x^3}{x^5}.$$
5. $(**)$ Pouvez-vous définir et deviner la valeur de a_6, a_7, etc. ?

Exercice 7 (Dérivées de $\mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arccos}, \mathrm{Arctan}$)**.**

1. Montrer que l'application $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$ est bijective. On note Arcsin l'application réciproque. Calculer $\mathrm{Arcsin}'(x)$ pour tout $x \in] - 1, 1[$. Est-ce que Arcsin est dérivable à droite en -1 ou à gauche en 1 ?
2. Montrer que l'application $[0, \pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos(x)$ est bijective. On note Arccos l'application réciproque. Calculer $\mathrm{Arccos}'(x)$ pour tout $x \in] - 1, 1[$. Est-ce que Arccos est dérivable à droite en -1 ou à gauche en 1 ?
3. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
4. Montrer que l'application $]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est bijective. On note Arctan l'application réciproque. Calculer $\mathrm{Arctan}'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 (Dérivée de $\ln|f(x)|$)**.** Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I et telle que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

1. Montrer que f garde un signe constant (> 0 ou bien < 0) sur I.

On rappelle que la fonction logarithme népérien $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto 1/x$.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(|f(x)|)$ est dérivable sur I, de dérivée $f'(x)/f(x)$.

Exercice 9 (Fonctions sh, ch, th, Argsh, Argch, Argth)**.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Remarquons que $\boxed{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que sh, ch et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$, étudier leurs variations et dessiner leurs graphes.
2. Montrer que l'application $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective. On note $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application réciproque. Calculer $\mathrm{Argsh}'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que l'application $\mathrm{ch} : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ est bijective. On note $\mathrm{Argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ l'application réciproque. Calculer $\mathrm{Argch}'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$. Montrer d'autre part que Argch n'est pas dérivable à droite en 1.
4. Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ puis montrer que $f = \mathrm{Argsh}$.
5. Soit $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$, puis montrer que g coïncide avec Argch sur $]1, +\infty[$ et aussi en 1.
6. Montrer que l'application $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ est bijective. On note $\mathrm{Argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ l'application réciproque. Calculer $\mathrm{Argth}'(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
7. Soit $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)$. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis montrer que $h = \mathrm{Argth}$.

Exercice 10 (Moyennes arithmétique et géométrique)**.**

1. Pour $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2$. (Considérer $a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}$.)
2. Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que, pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ on a, en notant $(a_1 \cdots a_n)^{1/n} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$, l'inégalité : $\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{1/n}$, avec égalité si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$. Indication : supposant le résultat établi pour n, on pourra étudier la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{a_1 + \cdots + a_n + x}{n+1} - (a_1 \cdots a_n x)^{1/n+1}$.

Exercice 11 (Fonctions dérivables convexes ou concaves)**.** Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et soit f une application $I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* (resp. *strictement convexe*) si elle vérifie la condition suivante :

$$(\cup) \qquad \forall a < b < c \text{ dans } I, \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

L'explication géométrique est la suivante : f est (strictement) convexe si pour tout $a < c$ dans I, la partie du graphe de f au-dessus du segment $]a, c[$ est (strictement) *en-dessous* de la droite joignant les points $(a, f(a))$ et $(c, f(c))$. Or, l'équation de cette droite est $y - f(a) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a)$, i.e. $y = f(a) + \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a)$. Donc la condition requise est que

$$(\star) \qquad \forall b \in]a, c[, \qquad f(b) \leq f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(b - a) \qquad \text{resp.} \qquad f(b) < f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(b - a)$$

ce qui équivaut à la condition $(\cup)$ plus haut.

De plus, on dit que f est (strictement) *concave* si $-f$ est (strictement) convexe, c.-à.-d. si f vérifie la condition suivante :

$$(\cap) \qquad \forall a < b < c \text{ dans } I, \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

1. Montrer que ($\cup$) est équivalente à l'inégalité ($\cup'$) ci-dessous :

$$\forall a < b < c \text{ dans } I,\ (f(b)-f(a))(c-b) \leq (f(c)-f(b))(b-a), \text{ resp. } (f(b)-f(a))(c-b) < (f(c)-f(b))(b-a)$$

et que celle-ci est équivalente à :

$$(\dagger) \qquad \forall a < b < c \text{ dans } I, \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Indication : écrire ($\dagger$) sous une forme ($\dagger'$) analogue à ($\cup'$), puis ajouter une même quantité aux deux membres de ($\dagger'$) pour obtenir ($\cup'$).

2. On suppose que f est dérivable sur I et que f' est croissante (resp. strictement croisssante) sur I. Soient $a < b < c$ dans I. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer alors que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b) \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b) < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

et en déduire que f est convexe (resp. strictement convexe).

Fixons $x_1 \leq x_2$ dans I. Alors les éléments du segment $[x_1, x_2]$ sont exactement les réels $x_1 + \mu(x_2 - x_1) = (1-\mu)x_1 + \mu x_2$, pour μ variant dans $[0,1]$, ce qu'on peut aussi écrire :

$$[x_1, x_2] = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1], \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

De plus, si $b = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x_1 + \lambda_2(x_2 - x_1)$, alors $\lambda_2 = \dfrac{b - x_1}{x_2 - x_1}$ et la condition ($\star$) donne alors que f est convexe (resp. strictement convexe) si et seulement si, pour tous $x_1 \leq x_2$ dans I et $\lambda_1, \lambda_2 \in]0,1[$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a :

$$(\star_2) \qquad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad (\text{resp. } < \text{ si } x_1 \neq x_2).$$

On suppose désormais que ($\star_2$) est vérifié.

3. ($**$) Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que : pour tous $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ dans I et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, on a, en notant $A = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \lambda_i \neq 0\}$,

$$(\star_n) \qquad \begin{cases} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in I \\ f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \\ \text{si } f \text{ est strictement convexe, l'inégalité est stricte sauf si } x_i = x_j \text{ pour } i, j \in A. \end{cases}$$

Indication. Soit $n > 2$ et supposons ($\star_k$) vraie pour $k = 2, \ldots, n-1$. Pour passer de $n-1$ à n, on peut supposer que tous les λ_i sont > 0, et donc aussi < 1. Posant alors $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i$, on a $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = (1-\lambda_n)x + \lambda_n x_n$. Utiliser alors que ($\star_2$) et ($\star_{n-1}$) sont vraies.

4. Montrer que la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est strictement concave. En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)}{n}$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$. Puis, en utilisant que la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, en déduire que :

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \qquad \text{pour tous } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*,$$

avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.