Feuille 5 : Nombres Complexes

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Ceux marqués $(*)$ nécessitent un peu plus de réflexion.

Exercice 1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de :

1. $z_1 = \dfrac{3+6i}{3-4i}$,
2. $z_2 = \left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2 + \dfrac{3+6i}{3-4i}$,
3. $z_3 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$.

Exercice 2. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1$,
2. $z_2 = 3+3i$,
3. $z_3 = -1-\sqrt{3}i$,
4. $z_4 = (1-i)^9$,
5. $z_5 = (\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}+i)$,
6. $z_6 = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$,
7. $z_7 = e^{i\theta}+1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$,
8. $z_8 = e^{i\theta}-1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$,
9. $z_9 = e^{i\theta}+e^{i\theta'}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 $(*)$**.** Déterminer les nombres complexes z tels que :

1. $|\overline{z} - i| = 1$,
2. $z\overline{z} = z^3$,
3. $i\mathrm{Re}(z^2) - \mathrm{Im}(z^2) = z$.

Exercice 4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $Z = \dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$. Indication : considérer $\overline{Z}$.

Exercice 5. On définit la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ et l'on pose $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

1. Montrer que tout élément de P a son image par f dans D.
2. Montrer que tout élément de D possède un unique antécédent par f dans P.

Exercice 6. Pour $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Exercice 7.

1. Déterminer les racines carrées de $w = 1+i$ sous la forme $a+ib$ avec a et b réels.
2. Calculer le module et l'argument de w. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

Exercice 8. $(*)$ Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $|z+z'| = |z|+|z'|$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $z' = \lambda\, z$. (Suggérons 2 méthodes possibles : (i) en faisant une rotation se ramener au cas où $z = r \in \mathbb{R}_+^*$. Ou bien : (ii) utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Exercice 9. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z|+|z'| \leq |z+z'|+|z-z'|$.

Exercice 10. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.
2. On suppose $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $|z_1 + \varepsilon z_2| \leq \sqrt{2}$.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1 = 0$,
2. $z^2 = 3+4i$,
3. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$,
4. $4z^2 - 2z + 1 = 0$.

Exercice 12. Pour tout $n \geq 2$, soit $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Si $z \in U_n$, on dit que z est une racine *primitive* n-ième de l'unité si $z^k \neq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k < n$.

1. Déterminer les racines primitives n-ièmes de l'unité pour $n = 2, 3, 4$.
2. En utilisant la forme exponentielle des racines n-ièmes de l'unité, montrer que pour tout $n \geq 2$ il existe au moins une racine primitive n-ième de l'unité.
3. Soit ξ une racine primitive n-ième de l'unité. Montrer que $\{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\} = U_n$.
4. En déduire que la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.
5. En utilisant la question 3, montrer que le produit des racines n-ièmes de l'unité vaut -1 si n est pair et 1 si n est impair.
6. $(**)$ En utilisant la forme exponentielle des racines n-ièmes, pouvez-vous déterminer toutes les racines primitives n-ièmes de l'unité ?

Exercice 13. On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard $(\,|\,)$. Alors :

(i) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$) l'application $z \mapsto e^{i\theta}z$ (resp $z \mapsto \rho e^{i\theta}z$) s'identifie à la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ (resp. à la similitude directe de rapport ρ et d'angle θ).

(ii) La conjugaison complexe $z = x + iy \mapsto \overline{z} = x - iy$ s'identifie à la symétrie orthogonale s_0 par rapport à l'axe des x.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on note r_θ la rotation d'angle θ, D_θ la droite de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$, et s_θ la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_θ.

1. En faisant un dessin, montrer que l'application composée $r_\theta \circ s_0 \circ r_{-\theta}$ est la symétrie orthogonale s_θ. En déduire que $s_\theta(z) = e^{2i\theta}\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.

2. Calculer $(s_\theta \circ s_\varphi)(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. En déduire que $s_\theta \circ s_\varphi$ est une rotation dont on précisera l'angle.
3. Calculer $(s_\theta \circ r_\varphi)(z)$ et $(r_\varphi \circ s_\theta)(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. En déduire que $s_\theta \circ r_\varphi$ et $r_\varphi \circ s_\theta$ sont des symétries orthogonales par rapport à des droites que l'on précisera.

Exercice 14 $(*)$. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ de module 1 et tels que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

1. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard $(\,|\,)$ et en utilisant que, pour $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a $(u \mid v) = \|u\|\,\|v\|\cos(\theta)$ où θ désigne l'angle entre u et v, montrer que l'angle entre z_1 et z_2 (resp. z_2 et z_3) est $2\pi/3$, puis que z_1, z_2, z_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.
2. Montrer que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.