Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M002, section MIPI 23, Corrigé du devoir du 9 avril 2014 (1h30)

**Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Pendant l'épreuve, les téléphones portables doivent être éteints et rangés.** Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte deux parties : la partie I ci-dessous est sur 8 pts, la partie II (4 pts), est à compléter au dos de la feuille.

# Partie I (8 pts)

**Exercice 1** (2 pts)**.** Soient $a, b, u_0 \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par la donnée du terme initial $u_0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose $a \neq 1$.

1. (0,25 pt) Montrer que l'équation $x = ax + b$ possède une unique solution $\alpha$, que l'on déterminera.

Solution : Comme $a \neq 1$, l'équation $(a-1)x = -b$ admet pour unique solution $\alpha = \dfrac{-b}{a-1} = \dfrac{b}{1-a}$.

2. (1 pt) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u'_n = u_n - \alpha$. Exprimer $u'_{n+1}$ en fonction de $u'_n$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u'_n$ en fonction de $a, b$ et $u'_0$.

Solution : On a : $u'_{n+1} - \alpha = au_n + b - (a\alpha + b) = a(u_n - \alpha) = au'_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc $u'_n = a^n u'_0$.

3. (0,75 pt) Donner une formule exprimant $u_n$ en fonction de $a, b$ et $u_0$.

Solution : On a :

$$u_n = u'_n + \alpha = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha = a^n u_0 + (1 - a^n)\alpha = a^n u_0 + b\frac{1 - a^n}{1 - a} = a^n u_0 + b(1 + a + \cdots + a^{n-1}).$$

**Exercice 2** (3 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (0,5 pt) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$.

Solution : En développant par rapport à la 1ère colonne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} -1-X & 2 & 0 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = -(1+X)(X^2-3) + 2(-1-X) = -(X+1)(X^2-1) = -(X+1)^2(X-1).$$

Autre méthode : en faisant $C_3 \to C_3 + C_1$ et en mettant en facteur $-1-X$ dans la 3ème colonne on obtient :

$$\begin{vmatrix} -1-X & 2 & 0 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 0 & 2 & -1-X \end{vmatrix} = -(X+1)\begin{vmatrix} -1-X & 2 & 1 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

puis en remplaçant $C_2$ par $C_2 - 2C_3$ et en développant par rapport à la 2ème colonne,

$$(X-1)(X+1)\begin{vmatrix} -1-X & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(X+1)^2(X-1).$$

2. (1 pt) Déterminer les valeurs propres de $A$ et la multiplicité algébrique de chacune.

Solution : D'après ce qui précède, les valeurs propres de $A$ sont : 1, de multiplicité algébrique 1, et $-1$, de multiplicité algébrique 2.

3. (1 pt) Pour chaque valeur propre $\lambda$ de $A$, déterminer la dimension de l'espace propre $V_\lambda$.

Solution : Comme 1 est valeur propre de multiplicité algébrique 1 on peut affirmer sans calcul que l'espace propre $V_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 1. Pour déterminer la dimension de $V_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$, il suffit de déterminer le rang de la matrice :

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or comme les colonnes $C_1$ et $C_2$ sont linéairement indépendantes, tandis que $C_3 = -C_1$, cette matrice est clairement de rang 2. (On aurait tout aussi bien pu dire que $L_1$ et $L_2$ sont linéairement indépendantes, tandis que $L_3 = L_1$.) Donc $\dim V_{-1} = 1$.

4. (0,5 pt) $A$ est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

Solution : $A$ n'est pas diagonalisable, car $\dim V_{-1} = 1$ alors que la multiplicité algébrique de la valeur propre $-1$ est 2.

**Exercice 3** (3 pts)**.** 1. (1 pt) Dans $\mathbb{R}(X)$, décomposer $f(X) = \dfrac{3X+3}{X^3-1}$ en éléments simples.

Solution : La décomposition en facteurs irréductibles de $X^3 - 1$ est : $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$. Donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}.$$

Multipliant par $X - 1$ et prenant la valeur en $X = 1$, on trouve $a = 2$. Puis, multipliant pas $X$ et prenant la limite en $+\infty$, on trouve $b = -a = -2$. Enfin, prenant la valeur en $X = 0$, on trouve $-3 = -2 + c$ d'où $c = -1$. Donc

$$f(X) = \frac{2}{X-1} - \frac{2X+1}{X^2+X+1}.$$

2. (1 pt) Sur $I = ]1, +\infty[$, déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{3x+3}{x^3-1}$.

Solution : Posons $P(x) = x^2+x+1$. Ce polynôme est $> 0$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ est égale à $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$, donc admet $\ln(x^2+x+1)$ comme primitive sur $\mathbb{R}$. D'autre part, la fonction $2/(x-1)$ admet $2\ln(x-1)$ comme primitive sur $I$, donc une primitive sur $I$ de $f$ est la fonction $F(x) = 2\ln(x-1) - \ln(x^2+x+1)$.

3. (1 pt) Pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $J = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{b} \frac{3(e^{2t}+e^t)}{e^{3t}-1} dt$.

Solution : Faisons le changement de variable $x = e^t = \varphi(t)$, alors $\varphi'(t) = e^t$ et l'on a :

$$\int_{\ln(2)}^{b} \frac{3(e^{2t}+e^t)}{e^{3t}-1} dt = \int_{\ln(2)}^{b} \frac{3(e^t+1)}{e^{3t}-1} e^t dt = \int_2^{e^b} f(x)dx = F(e^b) - F(2) = 2\ln(e^b-1) - \ln(e^{2b}+e^b+1) + \ln(7).$$

Partie II au dos →

# Partie II (4 pts)

| **Nom** | | **Prénom** | |
|---|---|---|---|

**Il y a 3 exercices. Pour chacun, il est demandé de faire figurer les réponses aux emplacements correspondants. On ne demande pas de justifications, seulement les résultats demandés.**

1. (1 pt) Calculer $I = \int_0^\pi t^2 \sin(t)dt$.

Solution : Intégrant par partie, on a : $I = \big[-t^2\cos(t)\big]_0^\pi + \int_0^\pi 2t\cos(t)dt = \pi^2 + \int_0^\pi 2t\cos(t)dt$. Intégrant à nouveau par parties, $\int_0^\pi 2t\cos(t)dt = \big[2t\sin(t)\big]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin(t) = \big[2\cos(t)\big]_0^\pi = -4$. Donc $I = \pi^2 - 4$.

2. (1 pt) Exprimer $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}\sum_{k=1}^n \exp\left(\frac{2k}{n}\right)$ sous la forme d'une intégrale, puis donner la valeur de cette intégrale.

Solution : Il s'agit de sommes de Riemann pour la fonction $t \mapsto \exp(t)$ sur l'intervalle $[0,2]$, donc elles convergent lorsque $n \to +\infty$ vers $\int_0^2 \exp(t)dt$, et cette intégrale vaut $e^2 - 1$.

On peut aussi dire que les sommes valent 2 fois une somme de Riemann pour $\exp(2t)$ sur $[0,1]$, donc elles convergent vers $2\int_0^1 e^{2t}dt = \big[e^{2t}\big]_0^1 = e^2 - 1$.

3. (2 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

3-a. Déterminer les valeurs propres $\mu_1, \mu_2$ de $A$.

Solution : Le polynôme caractéristique est $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$ donc les valeurs propres de $A$ sont 2 et 3.

3-b. Pour $i = 1, 2$, donner un vecteur propre $v_i = v_{\mu_i}$ de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix}$, puis écrire la matrice de passage $P$ de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$.

Solution : Pour la valeur propre 2, resp. 3, un vecteur propre est $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, resp. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ est alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3-c. Calculer $P^{-1}$.

Solution : Le déterminant de $P$ est $3 - 2 = 1$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3-d. (bonus) Déterminer *sans calcul* la matrice $P^{-1}AP$.

Solution : La matrice $A' = P^{-1}AP$ représente l'endomorphisme $u$ de $\mathbb{R}^2$ défini par $A$ dans la base $\mathcal{C}$ de vecteurs propres, donc on peut dire sans calcul que $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.