Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M002, section MIPI 23, Devoir du 9 avril 2014 (1h30)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Pendant l'épreuve, les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte deux parties : la partie I ci-dessous est sur 8 pts, la partie II (4 pts), est à compléter au dos de la feuille.

Partie I (8 pts)

Exercice 1 (2 pts)**.** Soient $a, b, u_0 \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par la donnée du terme initial u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose $a \neq 1$.

1. (0,25 pt) Montrer que l'équation $x = ax + b$ possède une unique solution α, que l'on déterminera.
2. (1 pt) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u'_n = u_n - \alpha$. Exprimer u'_{n+1} en fonction de u'_n puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u'_n en fonction de a, b et u'_0.
3. (0,75 pt) Donner une formule exprimant u_n en fonction de u_0 et de a et b.

Exercice 2 (3 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. (0,5 pt) Calculer le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
2. (1 pt) Déterminer les valeurs propres de A et la multiplicité algébrique de chacune.
3. (1 pt) Pour chaque valeur propre λ de A, déterminer la dimension de l'espace propre V_λ.
4. (0,5 pt) A est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 (3 pts)**.** 1. (1 pt) Dans $\mathbb{R}(X)$, décomposer $f(X) = \dfrac{3X+3}{X^3-1}$ en éléments simples.

2. (1 pt) Sur $I =]1, +\infty[$, déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{3x+3}{x^3-1}$.

3. (1 pt) Pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $J = \displaystyle\int_{\ln(2)}^{b} \frac{3(e^{2t}+e^t)}{e^{3t}-1} dt$.

Partie II au dos →

Partie II (4 pts)

Nom		**Prénom**	

Il y a 3 exercices. Pour chacun, il est demandé de faire figurer les réponses aux emplacements correspondants. On ne demande pas de justifications, seulement les résultats demandés.

---

1. (1 pt) Calculer $I = \int_0^\pi t^2 \sin(t) dt$.

---

2. (1 pt) Exprimer $\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{2k}{n}\right)$ sous la forme d'une intégrale, puis donner la valeur de cette intégrale.

---

3. (2 pts) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

3-a. Déterminer les valeurs propres μ_1, μ_2 de A.

3-b. Pour $i = 1, 2$, donner un vecteur propre $v_i = v_{\mu_i}$ de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix}$, puis écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$.

3-c. Calculer P^{-1}.

3-d. (bonus) Déterminer *sans calcul* la matrice $P^{-1}AP$.
