Université Pierre et Marie Curie
L1 sections MIPI 23.1 et 23.4

Devoir sur table n° 1 - 1M002

durée 1h40

L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite.
Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.
Cet examen comporte **3** exercices et est noté sur **12** plus une question de cours sur **2**.

Exercice 1 (4,5 points)

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $x'(t) = x(t) + \sin(t)$ et donner la solution vérifiant $x(0) = \dfrac{1}{2}$
2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $x''(t) + x'(t) - 6x(t) = e^t$
3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $x''(t)+x'(t)-6x(t) = 2\cos(2t)$

Exercice 2 (4,5 points)

Soit b $= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. On considère le système linéaire : $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & b_1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & b_2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 & = & b_3 \\ x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & b_4 \end{array} \right.$

1. Ecrire la matrice A du système, puis la matrice augmentée.
2. En faisant sur les lignes de la matrice augmentée des opérations que vous préciserez, déterminer rang(A) et une ou des équation(s) de Im(A).
3. Préciser les variables libres (s'il y en a) et donner des équations de Ker(A).
4. Quelle est la dimension de Ker(A) ? En déterminer une base.
5. Résoudre le système lorsque $b_1 = 0$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$ et $b_4 = 3$.

Exercice 3 (3 points)

Soient X une indéterminée, $A = \begin{pmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}[X])$ et $P = \det(A) \in \mathbb{R}[X]$.

1. En faisant des opérations sur les lignes et/ou colonnes de A, calculez $P = \det(A)$.
2. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{R}$ (on trouvera une racine double et une simple).

Question de cours (2 points)

1. Donner la définition d'une suite de Cauchy.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles convergente, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
   Questions bonus
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy à valeurs réelles.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
4. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.