Université Pierre et Marie Curie 2013–2014

1M002, MIPI 23, groupes 2,3,5 : devoir no.1 du 26 fév. 2014 (1h30) + question de cours (10 mn)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir est noté sur **12** (+ **2** pour la question de cours).

Exercice 1 (4,5 pts)**.** On considère le système linéaire suivant, à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = b_1 \\ 2x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +3x_4 & = b_2 \\ 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = b_3 \\ 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = b_4 \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A du système, puis la matrice augmentée.
2. En faisant sur les lignes de la matrice augmentée des opérations que vous préciserez, déterminer $\mathrm{rang}(A)$ et une ou des équation(s) de $\mathrm{Im}(A)$.
3. Préciser les variables libres (s'il y en a) et donner des équations de $\mathrm{Ker}(A)$.
4. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$? En déterminer une base.
5. Résoudre le système lorsque $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $b_4 = -1$.

Exercice 2 (3 pts)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. En faisant des opérations sur les lignes du couple $(A \mid I_4)$, déterminer si A est inversible.
2. Si oui, donnez la valeur de $\mathrm{dét}(A)$ et calculez A^{-1}.

Exercice 3 (1,5 pt)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{K})$ on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, i.e. $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 4 (3 pts)**.** Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles ci-dessous. Pour chacune d'elles on cherchera les solutions de l'équation homogène associée et on on cherchera une solution particulière sous la forme suggérée. *Bonus* : dans les deux cas, déterminer la solution $x(t)$ telle que $x(0) = 0 = x'(0)$.

1. $x''(t) + x'(t) - 6x(t) = e^{2t}$. On cherchera une solution particulière de la forme Cte^{2t}, pour une constante $C \in \mathbb{R}$ à déterminer.
2. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \cos(t)$. Pour déterminer une solution particulière, on pourra chercher une fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ solution de l'équation différentielle $z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{it}$.

Question de cours (2 pts)**.** 1. Définir la notion de suite réelle ou complexe *bornée.*

2. Définir la notion de suite *extraite.*

3. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.