MIPI 23 Réduction des endomorphismes (suite)

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A, puis écrire la matrice de passage $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ et calculer P^{-1}.
3. Déterminer sans calcul $D = P^{-1}AP$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^n en fonction de P et de D^n, puis calculer explicitement A^n.

On pose $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \leq x, y \leq 1 \\ x + y = 1 \end{matrix} \right\}$.

5. Pour tout $X \in E$, montrer que $AX \in E$.
6. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ le vecteur $A^n U_0$. Déterminer le vecteur $U_\infty = \lim_{n \to +\infty} U_n$ (i.e. $U_\infty = \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix}$ où $x_\infty = \lim_{n \to +\infty} x_n$ et $y_\infty = \lim_{n \to +\infty} y_n$).
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une majoration de $|x_n - x_\infty| + |y_n - y_\infty|$.
8. Déterminer n pour que $|x_n - x_\infty| + |y_n - y_\infty| < 0,01$.