MIPI 23 Équations différentielles et suites récurrentes linéaires

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués $(**)$ peuvent être considérés comme des « compléments de cours ». Les évaluations ne comporteront pas d'exercices de ce type.

Exercice 1. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $e^{2x}(x^2+x+1)$, 2. $e^{-3x}\cos(x)$, 3. $e^{2x}\cos(4x)$, 4. $e^{2x}\sin(x)$

Exercice 2. En utilisant le procédé de primitivation par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de :

1. $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$, 2. $x\ln(x)$.

3. $(*)$ Plus généralement, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ non nul, montrer que $h(x) = P(x)\ln(x)$ admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la forme $Q(x)\ln(x) - R(x)$, où Q, R sont des polynômes de degré $\deg(P)+1$ et $Q(0) = 0$.

Exercice 3.
1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x'(t) = 2x(t) + \cos(4t)$.
2. Déterminer la solution x telle que $x(0) = 0$.

Exercice 4. Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$, puis la solution x telle que $x(0) = 0 = x'(0)$.

1. $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^{2t}$
2. $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^{t}$
3. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{t}$
4. $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \cos(t)$
5. $x''(t) - 4x'(t) + 8x(t) = \cos(t)$
6. $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2t^2 + 1$.

(Pour 6. on pourra chercher une solution particulière qui soit un polynôme de degré 2 : $x_0(t) = at^2 + bt + c$.)

Exercice 5. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles qui vérifient la relation de récurrence linéaire : $u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0$.
1. Déterminer une base (u, v) de E formée de suites géométriques.
2. Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique élément de E tel que $w_0 = 2$ et $w_1 = 1$. Exprimer w dans la base (u, v), puis déterminer w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. On fixe $\theta \in \mathbb{R}$. Soit E (resp. $E_{\mathbb{C}}$) l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) des suites réelles (resp. complexes) qui vérifient la relation de récurrence linéaire : $u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$. Soit $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique élément de E tel que $w_0 = 1$ et $w_1 = \cos(\theta)$.
1. On suppose que $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$. Déterminer une base (u, v) de $E_{\mathbb{C}}$ formée de suites géométriques, puis en déduire une base (R, I) de E. Exprimer alors w dans la base (R, I), puis déterminer w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose que $\theta \in \mathbb{Z}\pi$. Déterminer alors une base (g, h) de E, puis exprimer w dans cette base et déterminer w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Soit $P = X^3 - 7X - 6 \in \mathbb{R}[X]$.
1. Déterminer une racine « évidente » $a \in \mathbb{R}$ de P.
2. Faire la division euclidienne de P par $X - a$ et montrer que P possède trois racines réelles distinctes a, b, c.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 : $u_{n+3} - 7u_{n+1} - 6u_n = 0$.

3. $(**)$ Montrer que E est de dimension 3 et possède une base (u, v, w) formée de suites géométriques.
4. $(*)$ Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique élément de E tel que $x_0 = 2$, $x_1 = -7$ et $x_2 = -3$. Exprimer x dans la base (u, v, w) puis déterminer x_n pour tout n.

Exercice 8. Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, T un endomorphisme de V et $a, b \in \mathbb{K}$. On note id l'application identique de V, définie par $\mathrm{id}(v) = v$ pour tout $v \in V$. On note h l'endomorphisme $(T - a\,\mathrm{id}) \circ (T - b\,\mathrm{id})$ de V.
1. Calculer $h(v)$, pour tout $v \in V$.
2. En déduire que $h = T^2 - sT + p\,\mathrm{id}$, où l'on a posé $T^2 = T \circ T$, $s = a + b$ et $p = ab$.

Exercice 9. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On rappelle que l'opérateur de décalage $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, qui envoie toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $T(u)$ définie par $T(u)_n = u_{n+1}$, i.e. $T(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ est un endomorphisme de $\mathcal{S}$. On note id l'application identique de $\mathcal{S}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note g^α la suite géométrique de raison α et de terme initial 1, i.e. $g^\alpha = (\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$, et h^α la suite $(n\alpha^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ (ses termes initiaux sont $(0, 1, 2\alpha, \dots)$). On fixe $\gamma, k \in \mathbb{K}$.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, montrer que l'espace propre $V_\lambda = \{u \in \mathcal{S} \mid T(u) = \alpha u\} = \mathrm{Ker}(T - \alpha\,\mathrm{id})$ est engendré par la suite g^α.
2. Déterminer la suite $(T - \alpha\,\mathrm{id})(h^\alpha)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $(T - \alpha\,\mathrm{id})(u) = kg^\gamma$, c.-à.-d. $u_{n+1} - \alpha u_n = k\gamma^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $(*)$ On suppose que $\gamma \neq \alpha$. Montrer que les éléments de $\mathcal{D}$ sont les suites $\dfrac{k}{\gamma - \alpha} g^\gamma + cg^\alpha$, pour $c \in \mathbb{K}$.
4. $(*)$ Si $\gamma = \alpha$, montrer que les éléments de $\mathcal{D}$ sont les suites $k\,h^\alpha + cg^\alpha$, avec $c \in \mathbb{K}$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On considère le polynôme $P = (X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - sX + p$, où $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha\beta$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+2} - su_{n+1} + pu_n = k\gamma^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

5. $(*)$ Pour tout $u \in \mathcal{S}$, montrer que le terme d'indice n de $(T - \beta\,\mathrm{id}) \circ (T - \alpha\,\mathrm{id})(u)$ est $u_{n+2} - su_{n+1} + pu_n$.
6. $(*)$ Si $P(\gamma) \neq 0$, montrer que la suite Cg^γ, où $C \in \mathbb{K}$, appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $C = k/P(\gamma)$.
7. $(**)$ Si $P(\gamma) = 0 \neq P'(\gamma)$, montrer que la suite Ch^γ, où $C \in \mathbb{K}$, appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $C = k/P'(\gamma)$.
8. $(**)$ Si $P(\gamma) = 0 = P'(\gamma)$, on note ℓ^γ la suite $(n(n-1)\gamma^{n-2})_{n\in\mathbb{N}}$; ses termes initiaux sont donc : $(0, 0, 2, 6\gamma, \dots)$. Montrer que la suite $C\ell^\gamma$, où $C \in \mathbb{K}$, appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $C = k/2$.
9. $(**)$ Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{S}$ et préciser sa direction.