MIPI 23 Espaces vectoriels et applications linéaires

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués $(**)$ peuvent être considérés comme des « compléments de cours ». Les évaluations ne comporteront pas d'exercices de ce type.

Exercice 1 (Applications injectives).

1. Soient $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{1, 2, 3\}$. Déterminer toutes les applications injectives $f : X \to Y$.
2. Combien y en a-t-il ?
3. $(**)$ Même question si $X = \{1, \dots, p\}$ et $Y = \{1, \dots, n\}$ pour des entiers $n \geq p \geq 1$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{S}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les suites réelles.

1. Pour deux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour $t \in \mathbb{R}$, rappeler la définition des suites $u + v$ et tu.
2. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont convergentes. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sev de $\mathcal{S}$.
3. Soit $\mathcal{L}_0$ l'ensemble des suites de limite 0. Montrer que $\mathcal{L}_0$ est un sev de $\mathcal{L}$.

Exercice 3. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{S}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On fixe un entier $p \geq 1$.

1. Montrer que l'application $\phi : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^p$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$ est linéaire.
2. Est-elle surjective ? Injective ? Déterminer son noyau.

Exercice 4. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathcal{S}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ l'opérateur de décalage, qui envoie toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $T(u)$ définie par $T(u)_n = u_{n+1}$, c.-à.-d. $T(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{S}$.
2. T est-il surjectif ? Injectif ? Déterminer son noyau.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, déterminer l'espace propre $V_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{S}})$.

Exercice 5. Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ (par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$).
2. $(*)$ Soit $\mathcal{F} = (P_1, \dots, P_m)$ une famille de polynômes non nuls, telle que $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_m)$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre. Indication : si l'on a $t_1 P_1 + \cdots + t_m P_m = 0$, avec $t_i \in \mathbb{K}$, montrer que $t_m = 0$, puis que $t_{m-1} = 0$, etc.

Exercice 6. Soit F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto A \sin(x + \varphi)$, où $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que tout élément de F est une combinaison linéaire des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
2. Réciproquement, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ appartient à F. Indication : considérer $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis déterminer un φ approprié.
3. Montrer que F est un sev du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et que les fonctions cos et sin forment une base de F.

Exercice 7. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) = a(x) + ib(x)$, avec $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$ est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ si ses parties réelle $a(x)$ et imaginaire $b(x)$ le sont. Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
2. Montrer que, dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $x \mapsto \exp(ix)$ est combinaison linéaire des fonctions sin et cos.
3. Montrer que les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui s'annulent en 0 forment un sous-espace vectoriel.

On rappelle que pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ on note $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si z est réel, ceci coïncide avec sa valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

4. Pour tout $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ dans $\mathbb{C}$, montrer que $\max\big(|a' - a|, |b' - b|\big) \leq |z' - z| \leq |a' - a| + |b' - b|$.
5. $(*)$ En utilisant la question précédente, montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

6. En utilisant la question précédente, démontrer plus simplement que si $\lambda \in \mathbb{C}$ et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue, alors λf l'est aussi.

Exercice 8. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_p$ des réels deux à deux distincts.

1. Montrer que les fonctions rationnelles $\dfrac{1}{x-a_1}, \ldots, \dfrac{1}{x-a_p}$ (définies sur $\mathbb{R} - \{a_1, \ldots, a_p\}$) sont linéairement indépendantes.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r_1, \ldots, r_n$ des réels deux à deux distincts.

2. $(*)$ Montrer que les fonctions $\exp(r_1 x), \ldots, \exp(r_n x)$ sont linéairement indépendantes. Indication : procéder par récurrence et utiliser l'opérateur de dérivation.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme non nul et soit $s \in \mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $(\exp(sx)P(x))^{(i)}$ est de la forme $\exp(sx)P_i(x)$, où $P_i(x)$ est un polynôme non nul, de même degré que P.
4. $(*)$ Soient $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[x]$ des polynômes non nuls. En procédant par récurrence sur n et en utilisant la question précédente, montrer que les fonctions $P_1(x)\exp(r_1 x), \ldots, P_n(x)\exp(r_n x)$ sont linéairement indépendantes.
5. Montrer que les fonctions $\exp(r_1 x), \ldots, \exp(r_n x)$ et $\dfrac{1}{x-a_1}, \ldots, \dfrac{1}{x-a_p}$ (toutes définies sur $\mathbb{R} - \{a_1, \ldots, a_p\}$) sont linéairement indépendantes.

Exercice 9. 1. Montrer que $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+y-4z = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

2. Déterminer une base de P.
3. Montrer que $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z = 0 = x+y-z\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de D.

Exercice 10 $(**)$. Soient $\mathbb{K}$ un corps, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X un ensemble, et $\mathcal{F}(X,V)$ l'ensemble de toutes les applications $X \to V$.

1. En s'inspirant du cas où $V = \mathbb{K}$, munir $\mathcal{F}(X,V)$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Lorsque $X = E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E,V)$ l'ensemble des applications linéaires $E \to V$. Montrer que $\mathcal{L}(E,V)$ est un sev de $\mathcal{F}(E,V)$.
3. Si $\dim(E) = p$ et $\dim(V) = q$, quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E,V)$?

Exercice 11. On note $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'ensemble des polynômes $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ tels que a_i soit nul pour tout i impair (resp. pair).

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que ces deux sous-espaces sont *supplémentaires.*[1]

Exercice 12. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-ensemble des fonctions paires (resp. impaires).

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et sont supplémentaires.
2. Idem en remplaçant $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par le sev des fonctions continues, resp. dérivables ou de classe C^∞.
3. $(*)$ Soit s un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V tel que $s \circ s = \mathrm{id}_V$. Montrer que les espaces propres $V_+ = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_V)$ et $V_- = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_V)$ sont supplémentaires. Lien avec les questions précédentes ?

Exercice 13. Pour chacune des équations différentielles linéaires d'ordre 2 suivantes, déterminer l'ensemble des solutions (on commencera par trouver une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène puis on trouvera une solution particulière).

1. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$. 2. $y'' - 2y' + y = e^x$ 3. $y'' - 4y' + 8y = \cos(x)$ 4. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$.

[1] On dit que deux sev E, F d'un esp. vect. V sont supplémentaires si tout $v \in V$ s'écrit $v = x + y$ avec $x \in E$ et $y \in F$, et si $E \cap F = \{0\}$ (ce qui équivaut à l'unicité de l'écriture $v = x + y$).