MIPI 23 Intégrales et primitives

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués $(**)$ peuvent être considérés comme des « compléments de cours ». Les évaluations ne comporteront pas d'exercices de ce type.

Exercice 1 (Quelques primitives)**.** Déterminer les primitives des fonctions suivantes, puis calculer l'intégrale demandée.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |t|$. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)dt$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sin(t)$ (resp. $\cos(t)$). Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(t)^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.
4. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Calculer $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)dt$ et déterminer si $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x)$ existe.
5. $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \tan(t)$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)dt$.
6. $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}$. Calculer, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x f(t)dt$.
7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Déterminer si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)dt$ existe.
8. $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Déterminer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} f(t)dt$.

Exercice 2 (Intégrations par parties)**.** Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(t)$. Calculer, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x f(t)dt$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t\cos(t)$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos(t)dt$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^2 e^t$. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

Exercice 3 (Changement de variables)**.** En utilisant des changements de variables, calculer :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt \qquad I_2 = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}dt \qquad I_3 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Exercice 4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** $(*)$ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$ une application vérifiant les propriétés suivantes :

(i) ϕ est *linéaire en chaque variable*, c.-à.-d., pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $x, y, x', y' \in E$, on a : $\phi(\lambda x + x', y) = \lambda\phi(x, y) + \phi(x', y)$ et $\phi(x, \mu y + y') = \mu\phi(x, y) + \phi(x, y')$.

(ii) ϕ est *symétrique*, c.-à.-d., pour tout $x, y \in E$ on a $\phi(y, x) = \phi(x, y)$.

(iii) Pour tout $x \in E$, on a $\phi(x, x) \geq 0$.

Soient $x, y \in E$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\phi(tx + y, tx + y)$.
2. En utilisant la condition (iii) et en considérant le discriminant d'un certain polynôme en t de degré 2, montrer que $\boxed{(\star)\ \phi(x, x)\phi(y, y) \geq \phi(x, y)^2.}$ En déduire que $|\phi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x, x)}\sqrt{\phi(y, y)}$.

On suppose que ϕ vérifie de plus la condition suivante, plus forte que (iii) :

(iii′) Pour tout $x \neq 0$ dans E, on a $\phi(x, x) > 0$.

3. Montrer alors que pour tout $x, y \in E$, l'inégalité $(\star)$ est une égalité si et seulement si x et y sont liés.
4. Montrer que l'application $E \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\phi(x,x)}$ est une *norme* sur E, i.e. vérifie :
   (a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
   (b) $\|tx\| = |t|\,\|x\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$,
   (c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in E$.
   Montrer de plus que si $x \neq 0$ et si l'on a égalité dans (c), alors il existe $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = tx$.

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et soit $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$.

5. Montrer que l'application ϕ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii′).
6. Pour $f, g \in E$, montrer que $\Big|\int_a^b f(t)g(t)dt\Big| \leq \Big(\int_a^b f(t)^2 dt\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b g(t)^2 dt\Big)^{1/2}$. Quand a-t-on égalité ?
7. Pour $f \in E$, montrer que $\Big(\int_a^b f(t)dt\Big)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(t)^2 dt$. Quand a-t-on égalité ?
8. Pour $f, g \in E$, montrer que $\Big(\int_a^b (f+g)(t)^2 dt\Big)^{1/2} \leq \Big(\int_a^b f(t)^2 dt\Big)^{1/2} + \Big(\int_a^b g(t)^2 dt\Big)^{1/2}$. Quand a-t-on égalité ?
9. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux applications continues. Montrer que
$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \Big(\int_a^b |f(t)|^2 dt\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b |g(t)|^2 dt\Big)^{1/2}.$$
   Quand a-t-on égalité ?

Exercice 5 (Décomposition en éléments simples)**.** Décomposer en éléments simples, puis trouver une primitive et enfin calculer l'intégrale entre $\frac{1}{2}$ et 1 de :

1. $F\ :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \dfrac{t}{1+t^3}$.
2. $G\ :]0, 2[\to \mathbb{R}$ définie par $G(t) = \dfrac{t+1}{t^3 - 4t}$.