MIPI 23 Suites

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués $(**)$ peuvent être considérés comme des « compléments de cours ». Les évaluations ne comporteront pas d'exercices de ce type.

Exercice 1. Soit $f : [0, \pi/2] \to [0, 1]$, $x \mapsto \cos(x)$.

1. Étudier les variations de $f(x) - x$. Montrer que f admet dans $[0, \pi/2]$ un unique point fixe c et qu'on a $c < \pi/4$ (on rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,414$).

Posons $\delta = \dfrac{\pi}{4} - c$ et soit $I = [c - \delta, c + \delta] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| \leq \delta\}$.

2. Montrer que pour tous $x, y \in I$ on a $|f(x) - f(y)| \leq (1/\sqrt{2})|x - y|$.
3. En déduire que $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$.
4. Montrer que pour tout $u_0 \in I$, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $|u_n - c| \leq (1/\sqrt{2})^n |u_0 - c|$ et converge vers c.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto (x^2 + 2)/3$. Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}_+$, on considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que la suite u est monotone. Pour quelles valeurs de u_0 la suite u est-elle croissante ? resp. décroissante ?
3. Quelles sont les limites possibles pour la suite u ? L'une de ces limites n'est-elle atteinte que pour un unique choix de u_0 ?
4. Posons $I = [0, 3/2]$. Déterminer l'intervalle $f(I)$ et montrer que $f(I) \subset I$.
5. Déterminer un réel $k \in]0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in f(I)$ on ait $|f(x) - f(y)| < k\,|x - y|$.
6. Étudier la convergence de la suite u lorsque $u_0 = 0$, resp. $u_0 = 3$.
7. En utilisant la question 2, étudier la convergence de la suite u lorsque $u_0 = 3/2$.
8. Dessiner le graphe de f en prenant approximativement 2 cm comme unité de longueur sur chaque axe puis, dans chacun des trois cas précédents, construire graphiquement les points u_0, u_1, u_2, u_3. (On ne demande pas de calculer leur valeur, mais simplement de construire ces points sur le graphe.)

Exercice 3. Soient $I =]-1, +\infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x + 1}$.

1. Étudier les variations de f. Déterminer l'intervalle $f(I)$ et montrer que $f(I) \subset I$.

Pour tout $u_0 \in I$, on considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour quelles valeurs de u_0 la suite u est-elle croissante ? resp. décroissante ?
3. Déterminer un réel $k \in]0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in f(I)$ on ait $|f(x) - f(y)| < k\,|x - y|$.
4. Montrer que f admet dans I un unique point fixe c, que l'on déterminera.
5. Si u converge, quelles sont les limites possibles ?
6. Étudier la convergence lorsque $u_0 < c$, resp. $u_0 > c$.

Exercice 4. Soient $I =]-1, +\infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2}{x + 1}$. On pose $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f^2$.

1. Étudier les variations de f. Déterminer l'intervalle $f(I)$ et montrer que $f(I) \subset I$.

Pour tout $u_0 \in I$, on considère et la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que f admet dans I un unique point fixe c, que l'on déterminera.
3. Déterminer les intervalles $f^2(I)$ et $J = f^3(I)$ et montrer que $f(J) \subset J$.
4. Déterminer un réel $k \in]0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in J$ on ait $|f(x) - f(y)| < k\,|x - y|$.
5. Montrer que pour tout $u_0 \in I$, la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5. Soit N un entier ≥ 2. On cherche à approximer $\sqrt{N}$ au moyen d'une suite u convergeant vers $\sqrt{N}$.

1. Appliquer la méthode de Newton à la fonction $f(x) = x^2 - N$. Comment est définie la suite récurrente $u_{n+1} = g(u_n)$ ainsi obtenue ?
2. Dessiner le graphe de f.
3. Quels sont les points de départ u_0 pour lesquels la méthode de Newton donne une suite qui converge vers $\sqrt{N}$? resp. vers $-\sqrt{N}$?
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $g(x) - \sqrt{N}$ en fonction de $x - \sqrt{N}$.
5. On suppose que $\sqrt{N} < u_0 < \sqrt{N} + 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_{n+1} - \sqrt{N} < (u_n - \sqrt{N})^2$.
6. Comment trouver un tel point de départ u_0 ?
7. ($**$) Soit k un entier ≥ 3. Mêmes questions pour approximer $\sqrt[k]{N} = N^{1/k}$.

Exercice 6. ($*$) Soit $R \in \mathbb{R}_+$. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer que toute fonction continue sur le disque fermé $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq R\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 7. (**) On veut montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq 1$ admet une racine dans $\mathbb{C}$. Notons $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, avec $a_d \neq 0$. Si $a_0 = 0$ alors $P(0) = 0$ donc dans ce qui suit on suppose $a_0 \neq 0$.

1. Montrer que « $|P(z)|$ tend vers l'infini quand $|z|$ tend vers l'infini », c.-à.-d. que pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe $R > 0$ tel que si $|z| > R$, alors $|P(z)| > A$.

D'après la question précédente, il existe $R > 0$ tel que $|P(z)| > |a_0|$ pour tout z tel que $|z| > R$. On note $\overline{D}(0, R)$ le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

2. En utilisant l'exercice 6, montrer que la fonction $\overline{D}(0, R) \to \mathbb{R}_+$, $z \mapsto |P(z)|$ atteint son minimum m en un point z_0 de $\overline{D}(0, R)$. Montrer de plus que $m \leq |P(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On veut montrer que $m = 0$ i.e. que $P(z_0) = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $P(z_0) \neq 0$. Remplaçant alors P par $P/P(z_0)$, on se ramène au cas où $P(z_0) = 1 = m$. Remplaçant la variable z par u puis faisant le changement de variable $z \mapsto u - z_0$, c.-à.-d., remplaçant le polynôme $P(u)$ par le polynôme $Q(z) = P(u - z_0)$, on se ramène au cas où $z_0 = 0$. On a donc $|P(z)| \geq |P(0)| = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, et

$$P(0) = 1 + \sum_{j=1}^{d} b_j z^j = 1 + b_k z^k + \cdots + b_d z^d,$$

où l'on a noté k le plus petit entier $j \geq 1$ tel que $b_j \neq 0$. Écrivons $b_k = -re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto P(te^{-i\theta/k})$.

3. En faisant un développement limité à l'ordre k de $f(t)$ au voisinage de $t = 0$, montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ que $|f(t_0)| = |P(t_0 e^{-i\theta/k})|$ soit < 1.
4. En déduire que $m = 0$ et que P a une racine. On dit que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos.