CHAPITRE 1

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1.0. Corps

L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels et l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes sont munis des deux lois $+$ et $\times$, vérifiant les propriétés rappelées ci-dessous, qui font de chacun d'eux un *corps*. Il est commode d'introduire un vocabulaire spécial pour désigner les propriétés vérifiées par l'addition. Pour cela, désignons pour un moment $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) par A. Alors on sait que l'addition vérifie les quatre propriétés suivantes :

(a) Elle est *associative* : pour tout $x, y, z \in A$, $(x+y)+z = x+(y+z)$ et donc on peut omettre les parenthèses.

(n) Elle possède un *élément neutre*, noté 0, tel que $0 + x = x = x + 0$, pour tout $x \in A$.

(o) Tout élément $x \in A$ possède un *opposé*, noté $-x$, tel que $-x + x = 0 = x + (-x)$.

(c) L'addition est *commutative* : pour tout $x, y \in A$, $x + y = y + x$.

Définition 1.1. — Un ensemble A muni d'une addition $+$ vérifiant ces quatre propriétés est appelé un *groupe abélien* ou groupe commutatif. [1] Par exemple, $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens, ainsi que $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$.

De plus, la multiplication sur $A = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifie certaines propriétés, vis-à-vis d'elle même ou de l'addition :

(a) Elle est *associative* : pour tout $x, y, z \in A$, $(xy)z = x(yz)$ et donc on peut omettre les parenthèses.

(u) Elle possède un *élément unité*, noté 1, tel que $1x = x = x1$, pour tout $x \in A$.

(b) La multiplication est *distributive* à gauche et à droite par rapport à l'addition, ce qu'on peut exprimer en disant qu'elle est *bi-additive* : pour tout $x, y, z \in A$, on a : $x(y + z) = xy + xz$ et $(x + y)z = xz + yz$.

(c) La multiplication est *commutative* : pour tout $x, y \in A$, $xy = yx$.

(i) Tout élément $x \in A^* = A - \{0\}$ possède un *inverse*, noté x^{-1} ou $1/x$, tel que $x^{-1}x = 1 = xx^{-1}$.[2]

Définitions 1.2. — Soit A un ensemble muni d'une addition $+$ qui en fait un groupe abélien, et d'une multiplication vérifiant les propriétés (a,u,b,c) ci-dessus.

(1) On dit alors que A est un *anneau commutatif*. Exemples : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

---

[1] Un *groupe* est un ensemble G muni d'une « loi de multiplication » $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ qui vérifie (a,n,i) = l'analogue multiplicatif de (a,n,o), c.-à-d. : (a) pour tout $f, g, h \in G$, $(fg)h = f(gh)$ et donc on peut omettre les parenthèses. (n) Il existe un élément neutre, noté e, tel que $eg = g = ge$ pour tout $g \in G$. (i) Tout élément $g \in G$ possède un *inverse*, noté g^{-1}, tel que $gg^{-1} = e = g^{-1}g$. La théorie des groupes est beaucoup plus compliquée que l'étude des groupes abéliens.

[2] Les propriétés (a,u,c,i) impliquent donc que $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$, munis de la multiplication, sont des groupes commutatifs.

(2) Si de plus la multiplication vérifie (i), c.-à-d. si tout élément non nul de A possède un inverse, on dit que A est un *corps commutatif*. Exemples : $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.[3]

(3) Au contraire, si la multiplication vérifie seulement (a,u,b) [mais pas (c)] on dit que A est un *anneau* [non commutatif]. Exemple : on introduira plus tard, pour tout entier $n \geq 1$, l'anneau des matrices $M_n(\mathbb{K})$, qui est non-commutatif si $n \geq 2$.

Remarque 1.3. — Il existe aussi des corps non commutatifs, mais on ne les rencontre presque jamais. Aussi il est d'usage fréquent de dire simplement « corps » au lieu de « corps commutatif », et dans la suite nous suivrons cet usage. De plus, partout où nous dirons : « Soit $\mathbb{K}$ un corps » le lecteur peut penser que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui sont les seuls corps qui nous intéresseront dans ce cours.

1.1. Espaces vectoriels

(Q) ***Définition 1.4*** **(Espaces vectoriels)**. — Soit $\mathbb{K}$ un corps. Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel V est un *groupe abélien* $(V, +)$ muni d'une « opération » de $\mathbb{K}$ sur V, c.-à-d. d'une application $\mathbb{K} \times V \to V$, $(t, v) \mapsto t \cdot v$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $1 \cdot v = v$ et $t \cdot (t' \cdot v) = (tt') \cdot v$

(ii) $(t + t') \cdot v = t \cdot v + t' \cdot v, \qquad t \cdot (v + v') = t \cdot v + t \cdot v'$.

On peut mémoriser la condition (i) en disant que 1 agit par l'identité et que l'opération est « associative », et la condition (ii) en disant que l'action de $\mathbb{K}$ sur V est « compatible avec l'addition » (dans $\mathbb{K}$ et dans V).

Un point de vocabulaire : les éléments de V sont appelés les « vecteurs » et ceux de $\mathbb{K}$ les « scalaires ». On désigne alors l'opération de $\mathbb{K}$ sur V par « la multiplication par un scalaire ».

Exemples 1.5. — 1) $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition définie par $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et la multiplication par $t \in \mathbb{K}$ définie par $t \cdot (x_1, \dots, x_n) = (tx_1, \dots, tx_n)$.

2) L'ensemble $\mathscr{S}_\mathbb{K}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition définie par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la multiplication par $t \in \mathbb{K}$ définie par $t \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Soit X un ensemble. Alors l'ensemble $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ de toutes les fonctions $f : X \to \mathbb{K}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire définies comme suit : pour $f, g \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ et $t \in \mathbb{K}$, les fonctions $f + g$ et tf sont définies par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(tf)(x) = tf(x)$, pour tout $x \in X$.

4) L'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire définies comme suit : pour $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$, $Q = b_0 + b_1X + \cdots + b_qX^q$ et $t \in \mathbb{K}$, on a

$$P + Q = \sum_{i=0}^{m=\max(p,q)} (a_i + b_i)X^i \qquad \text{et} \qquad tP = ta_0 + ta_1X + \cdots + ta_pX^p,$$

où dans la 1ère somme on convient que $a_i = 0$ si $i > p$ et $b_i = 0$ si $i > q$.

5) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $M_{p,q}(\mathbb{K})$ des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire définies par :

$$(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} + (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \qquad \text{et} \qquad t \cdot (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} = (ta_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}.$$

Notation 1.6 **(Vecteur nul)**. — Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors V, étant un groupe abélien, possède un élément zéro, qu'on notera provisoirement 0_V ou $\overrightarrow{0}$. Par exemple, dans les cinq exemples précédents, 0_V est le vecteur suivant : $(0, \dots, 0)$ dans $\mathbb{K}^n$, la suite constante nulle : $u_n = 0$ pour tout n, la fonction nulle : $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$, le polynôme constant nul $P = 0$, la matrice nulle : $a_{p,q} = 0$ pour tout p, q.

---

[3] Il existe d'autres corps commutatifs, par exemple les corps $\mathbb{R}(X)$ ou $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou les corps finis à p éléments $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour tout nombre premier p.

Notons 0 l'élément zéro du corps $\mathbb{K}$. Alors la condition (ii) de 1.4 entraîne que, pour tout $v \in V$,

$$0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \qquad \text{d'où} \qquad 0 \cdot v = 0_V = \overrightarrow{0}.$$

La plupart du temps, le vecteur nul $0_V = \overrightarrow{0}$ sera noté simplement 0. C'est bien sûr un abus de notation, mais on s'y habitue très vite et cela ne posera aucun problème. Ainsi, on note $\{0\}$ l'espace vectoriel nul.

Terminologie 1.7. — Soient $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs et $t_1, \dots, t_n$ des scalaires, alors $t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$ s'appelle une *combinaison linéaire* des v_i.

(Q) ***Définition 1.8* (Sous-espaces vectoriels).** — Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un *sous-espace vectoriel* (pour abréger, on dira « sev ») W de V est un sous-ensemble de V qui contient 0_V et qui est « stable par combinaisons linéaires », c.-à-d. qui vérifie la condition suivante :

$$(*) \qquad \text{pour tout } w, w' \in W \text{ et } t, t' \in k, \text{ on a } t \cdot w + t' \cdot w' \in W.$$

Ceci implique bien sûr (prendre $t' = 1$) la condition ci-dessous :

$$(\text{sev}) \qquad \text{pour tout } w, w' \in W \text{ et } t \in k, \text{ on a } t \cdot w + w' \in W$$

qui elle-même implique que W est stable par addition (prendre $t = 1$) et par la multiplication par un scalaire (prendre $w' = 0$), donc qui implique $(*)$ et lui est donc équivalente. Donc en pratique, pour vérifier qu'un sous-ensemble W contenant 0_V est un sev, on utilisera de préférence la condition (sev), plus courte à écrire.

Exemples 1.9. — Dans les exemples (1) à (3) ci-dessous on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(1) Le plan « horizontal » $P = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, donné par l'équation $x_3 = 0$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) L'ensemble $\mathscr{L}$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes est un sev du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ des suites réelles, et le sous-ensemble $\mathscr{L}_0$ des suites de limite 0 en est un sev. *Exercice :* démontrer ces deux assertions !

(3) L'ensemble des fonctions continues (resp. dérivables, resp. de classe C^n, resp. de classe C^∞) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sev du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$. *Exercice :* démontrer ceci !

(4) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $\leq n$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$ (par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$). *Exercice :* démontrer ceci !

(5) L'ensemble des matrices $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in M_3(\mathbb{K}) = M_{3,3}(\mathbb{K})$ qui sont « triangulaires supérieures », i.e. telles que $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$, est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{K})$.

1.2. Applications linéaires

(Q) ***Définitions 1.10.*** — Soient V, W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\phi : V \to W$ une application.

(1) On dit que ϕ est une *application linéaire* (ou « homomorphisme[4] d'espaces vectoriels ») si elle préserve l'addition et l'opération des scalaires, c.-à-d., si pour tout $v, v' \in V$ et $t \in k$ on a :

$$(\text{al}) \qquad \phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v') \qquad \text{et} \qquad \phi(t \cdot v) = t \cdot \phi(v).$$

Notons que ces deux conditions impliquent, pour tout $v, v' \in V$ et $t, t' \in k$:

$$(*) \qquad \phi(t \cdot v + t' \cdot v') = \phi(t \cdot v) + \phi(t' \cdot v') = t \cdot \phi(v) + t' \cdot \phi(v').$$

Cette condition implique (prendre $t' = 1$) la condition ci-dessous

$$(\text{AL}) \qquad \phi(t \cdot v + v') = t \cdot \phi(v) + \phi(v')$$

qui elle-même implique (al) (prendre respectivement $t = 1$ et $v' = 0$). Donc les trois conditions (al), $(*)$ et (AL) sont équivalentes. Donc en pratique, pour vérifier qu'une application ϕ est linéaire on utilisera de préférence la condition (AL), et l'on saura alors que la condition $(*)$ est vérifiée. Plus généralement, si ϕ est linéaire, on montre par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $v_1, \dots, v_n \in V$ et $t_1, \dots, t_n \in k$ on a :

$$\boxed{\phi(t_1v_1 + \cdots + t_nv_n) = t_1\phi(v_1) + \cdots + t_n\phi(v_n).}$$

[4] du grec *morphé* : « forme » et *homos* : « semblable ».

(Q) (2) Si $W = V$ et si $\phi : V \to V$ est linéaire, on dit alors que ϕ est un *endomorphisme*[5] de V. Par exemple, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\lambda\,\mathrm{id}_V : V \to V$, $v \mapsto \lambda v$ est un endomorphisme de V, appelé l'homothétie de rapport λ. (Pour tout ensemble X, on note id_X l'application identité de X, définie par $\mathrm{id}_X(x) = x$ pour tout $x \in X$.)

Remarque 1.11. — La notion d'application linéaire permet parfois d'exprimer en peu de mots certaines propriétés. Par exemple le fait que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables et si $t \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ et tf sont dérivables de dérivées $f' + g'$ et tf' peut s'exprimer en disant que l'ensemble $\mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un sev de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que l'application $D : \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f \mapsto D(f) = f'$ est linéaire. De plus, si on note $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le sev des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfininiment dérivables, alors D définit un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(Q) ***Rappel 1.12* (Injections)**. — Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. On rappelle que f est *injective* si deux éléments distincts quelconques $x \neq x'$ ont des images par f distinctes. Ceci équivaut à dire : quelques soient x, x' dans X, si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$.

Exercice 1.13. — Si $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{1, 2, 3\}$, déterminer toutes les applications injectives $f : X \to Y$. Combien y en a-t-il ? Même question si $X = \{1, \dots, p\}$ et $Y = \{1, \dots, n\}$ pour des entiers $n \geq p \geq 1$.

(Q) ***Définition 1.14* (Noyau)**. — Soient V, W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : V \to W$ une application linéaire. On définit son *noyau*, noté $\mathrm{Ker}(f)$[6] par $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}.}$ C'est un sous-espace vectoriel de V (exercice !).

D'autre part, comme f est linéaire, pour tout $v, v' \in V$ on a $f(v) = f(v') \iff 0 = f(v) - f(v') = f(v - v')$ donc on voit que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Donc, pour prouver qu'une application linéaire f est injective, on démontrera toujours que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, au lieu d'utiliser la définition générale de l'injectivité 1.12.

Exercice 1.15. — Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et f, g deux endomorphismes de V. Montrer que l'application $\lambda f + g : V \to V$, $v \mapsto \lambda f(v) + g(v)$ est un endomorphisme de V.

(Q) ***Définitions 1.16* (Valeurs et vecteurs propres)**. — Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un *endomorphisme* de V. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de f s'il existe un vecteur v *non nul* tel que $f(v) = \lambda v$, c.-à-d. si le sous-espace vectoriel

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

est non nul. Dans ce cas, on dit que λ est une *valeur propre* de f, que V_λ est *l'espace propre* associé à λ, et tout élément de $V_\lambda - \{0\}$ est appelé un *vecteur propre* de f.

Remarquons aussi que, en considérant l'endomorphisme $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ de V (cf. l'exercice précédent), on voit que $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$.

Exercice 1.17. — Soit $V = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et soit D l'endomorphisme de V défini par $D(f) = f'$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer l'espace propre V_λ.

Proposition 1.18. — *Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications linéaires. Alors l'application composée $g \circ f : E \to G$, $x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$ est linéaire.*

(Q) *Démonstration*. — Pour $x, y \in E$ et $t \in \mathbb{K}$ on a $(g \circ f)(tx + y) = g\big(f(tx + y)\big) = g\big(tf(x) + f(y)\big) = tg(f(x)) + g(f(y)) = t(g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)$. □

[5] du grec *endon* : « en dedans ».

[6] de l'allemand Kern : « noyau ».

1.3. Familles libres ou liées, familles génératrices, bases et dimension

(Q) ***Définition 1.19*** **(Familles libres ou liées).** — Soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V.(7) On dit que $v_1, \dots, v_n$ sont *linéairement indépendants*, et que $\mathscr{F}$ est une *famille libre*, s'il n'existe pas de relation linéaire non triviale entre les v_i, c.-à-d., si la condition suivante est vérifiée :

(FL) pour *tous* $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{K}$, si $t_1v_1 + \cdots + t_nv_n = 0$, *alors* $t_1 = 0 = \cdots = t_n$.

Il découle de la définition que : $\boxed{\textit{toute sous-famille } \mathscr{F}' \textit{ d'une famille libre } \mathscr{F} \textit{ est libre.}}$ En effet, soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille libre. Se donner une *sous-famille* $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ revient à se donner un *sous-ensemble* J de l'ensemble d'indices $I = \{1, \dots, n\}$, disons $J = \{i_1, \dots, i_p\}$ avec $p \le n$ et $1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$. Soient $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{K}$ tels que $t_1v_{i_1} + \cdots + t_pv_{i_p} = 0$; alors, en posant $s_i = 0$ pour tout $i \in I - J$, on a :

$$(*) \qquad \sum_{r=1}^{p} t_r v_{i_r} + \sum_{i \in I-J} s_i v_i = 0,$$

et comme la famille $\mathscr{F}$ est libre, alors tous les coefficients dans $(*)$ ci-dessus sont nuls, donc on a $t_1 = 0 = \cdots = t_p$. Ceci montre que la sous-famille $\mathscr{F}' = (v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ est libre.

(Q) Au contraire, on dit que $v_1, \dots, v_n$ sont *liés* (ou linéairement dépendants), et que $\mathscr{F}$ est une *famille liée*, s'il existe une relation linéaire non triviale entre les v_i, c.-à-d., s'il existe des scalaires non tous nuls $t_1, \dots, t_n$, tels que $t_1v_1 + \cdots + t_nv_n = 0$. Dans ce cas, si par exemple $t_i \neq 0$, on peut exprimer v_i en fonction des v_j, pour $j \neq i$:

$$v_i = -\sum_{j \neq i} \frac{t_j}{t_i}\, v_j.$$

Il résulte de la définition que : $\boxed{\textit{toute famille contenant une famille liée est liée.}}$ En effet, soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille contenant une sous-famille $\mathscr{F}' = (v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ qui est liée. Alors il existe $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tels que $t_1v_{i_1} + \cdots + t_pv_{i_p} = 0$; alors, en posant $s_i = 0$ pour tout $i \in I - J$, on a la relation linéaire non triviale :

$$\sum_{r=1}^{p} t_r v_{i_r} + \sum_{i \in I-J} s_i v_i = 0.$$

Ceci montre que la famille $\mathscr{F}$ est liée.

Exemple 1.20. — Dans $\mathbb{K}^2$, les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ sont linéairement indépendants. En effet, pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$, $t_1e_1 + t_2e_2 = (t_1, t_2)$, et ceci est le vecteur nul $\overrightarrow{0} = (0, 0)$ de $\mathbb{K}^2$ si et seulement si $t_1 = 0 = t_2$. Par contre, pour tout vecteur $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$, la famille (e_1, e_2, u) est liée puisqu'on a la relation linéaire non triviale $u - x_1e_1 - x_2e_2 = 0$.

Définitions 1.21 **(Sous-espace engendré par une famille. Familles génératrices)**

(Q) Soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V.

(1) On note $\boxed{\mathrm{Vect}(\mathscr{F})}$ ou $\boxed{\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)}$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires $\sigma = t_1v_1 + \cdots + t_nv_n$, avec $t_i \in \mathbb{K}$. C'est un *sous-espace vectoriel* de V, car si $\sigma' = t'_1v_1 + \cdots + t'_nv_n$ est une autre combinaison linéaire et si $\lambda \in k$, alors

$$\lambda\sigma + \sigma' = (\lambda t_1 + t'_1)v_1 + \cdots + (\lambda t_n + t'_n)v_n$$

est encore une combinaison linéaire du même type. De plus, si E est un sous-espace vectoriel de V contenant $v_1, \dots, v_n$, alors il contient toute combinaison linéaire σ comme ci-dessus, i.e. il contient $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. Donc : $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ est le *plus petit* sous-espace vectoriel de V contenant $v_1, \dots, v_n$. On l'appelle le sous-espace vectoriel *engendré par* $v_1, \dots, v_n$.

(7) Une « famille » de n éléments d'un ensemble X consiste en la donnée de n éléments de X, munis d'une *numérotation* $x_1, \dots, x_n$ de ces éléments. On peut voir ceci comme une *application* de l'ensemble $I = \{1, \dots, n\}$ dans X. Alors, la notion de famille se généralise à un ensemble d'indices I arbitraire : une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de X paramétrée par I est la donnée d'un élément x_i de X pour chaque $i \in I$, i.e. d'une application de I dans X. Par exemple, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels est une famille de réels paramétrée par l'ensemble d'indices $I = \mathbb{N}$.

(2) On dit que $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ est une *famille génératrice* de V si $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = V$, c.-à-d., si tout élément de V s'écrit comme combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_n$. Dans ce cas, on dit aussi que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ *engendrent* V.

Il résulte de la définition que : *toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.*

(Q) ***Définition 1.22*** **(Bases).** — Soit $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V.

(1) On dit que $\mathscr{B}$ est une *base* de V si tout $v \in V$ *s'écrit de façon unique* comme combinaison linéaire des v_i, c.-à-d., si pour tout $v \in V$, *il existe un unique* n-uplet $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$.

(2) Ceci entraîne que la famille $\mathscr{B}$ est génératrice (c'est clair !), et aussi qu'elle est libre : si $t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n = \overrightarrow{0} = 0 v_1 + \cdots + 0 v_n$, l'unicité de l'écriture entraîne que $t_i = 0$ pour tout i.

(3) Réciproquement, si $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ est une famille génératrice et libre, c'est une base car si on a une égalité $v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n = t'_1 v_1 + \cdots + t'_n v_n$ alors on a $(t_1 - t'_1) v_1 + \cdots + (t_n - t'_n) v_n = 0$ d'où $t_i = t'_i$ pour tout i (puisque $\mathscr{F}$ est libre), d'où l'unicité de l'écriture.

(4) Donc : la famille $\mathscr{B}$ est une base si et seulement si elle est à la fois génératrice et libre.

(Q) ***Exemple 1.23*** **(Base canonique de $\mathbb{K}^n$).** — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'espace $\mathbb{K}^n$ considérons les vecteurs :

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \cdots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

i.e. e_i a toutes ses coordonnées nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Alors tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i, à savoir : $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Donc $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

Autres exemples 1.24. — 1) Soit $M_{m,n}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note E_{ij} la « *matrice élémentaire* » dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i, j) (c.-à-d., celui situé sur la ligne i et la colonne j), qui vaut 1. Alors, toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ *s'écrit de façon unique* comme combinaison linéaire des E_{ij}, à savoir :

$$A = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} a_{ij}\, E_{ij},$$

où a_{ij} est le coefficient d'indice (i, j) de A. Donc la famille $(E_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ est une *base* de $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

2) La famille $(1, X, \dots, X^d)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}_d[X]$ des polynômes de degré $\leq d$. En effet, tout $P \in \mathbb{K}_d[X]$ s'écrit de façon unique $P = a_0 + \cdots + a_d X^d$, avec les a_i dans $\mathbb{K}$.

Remarques 1.25. — (1) Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on « voit » que si u_1, u_2 sont deux vecteurs non colinéaires, alors tout $u \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire $u = x_1 u_1 + x_2 u_2$ (en projetant sur les droites engendrées par u_1 et u_2). Cette écriture est unique, car si $u = y_1 u_1 + y_2 u_2$ alors $(y_1 - x_1) u_1 + (y_2 - x_2) u_2 = 0$ et comme u_1, u_2 sont non colinéaires, ceci entraîne $y_1 - x_1 = 0 = y_2 - x_2$. Donc (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Réciproquement, soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^2$. Remarquons que $\mathscr{B}$ contient au moins deux vecteurs u_1, u_2 non colinéaires, car sinon toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{B}$ appartiendraient à une même droite. Mais alors $\mathscr{B}$ ne contient que ces deux vecteurs, car s'il y en avait un 3-ème u_3, il s'écrirait $u_3 = x_1 u_1 + x_2 u_2$ ce qui constituerait deux écritures distinctes de ce vecteur comme combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}$. Donc : *toute base de $\mathbb{R}^2$ a exactement deux éléments.*

(2) De même, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on « voit » que si u_1, u_2, u_3 sont trois vecteurs non coplanaires, alors tout $u \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$ (en projetant sur les droites engendrées par u_1, u_2 et u_3). Cette écriture est unique, car si $u = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ alors $(y_1 - x_1) u_1 + (y_2 - x_2) u_2 + (y_3 - x_3) u_3 = 0$ et si l'un des coefficients $y_i - x_i$ était non nul, alors u_i serait combinaison linéaire des deux autres vecteurs, contrairement à l'hypothèse que les vecteurs sont non coplanaires ; on a donc $y_i = x_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

Réciproquement, si $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ on montre comme en (1) que $\mathscr{B}$ contient au moins trois vecteurs u_1, u_2, u_3 non coplanaires, et ensuite que $\mathscr{B}$ ne contient que ces trois vecteurs. Donc :
toute base de $\mathbb{R}^3$ a exactement trois éléments.

On va généraliser ce résultat en démontrant le :

(Q) ***Théorème 1.26.*** — *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si V possède une base $\mathscr{B}$ formée de n éléments, alors* toute *base de V a exactement n éléments. On dit alors que V est de* dimension n *et l'on écrit* $\dim(V) = n$.

Dans la remarque précédente, on a utilisé le fait qu'on a une « vision géométrique » de ce qu'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 (une droite), 2 (un plan) ou 3 (l'espace ambient). Pour démontrer le théorème précédent pour tout corps $\mathbb{K}$ et toute dimension n, on a besoin de traduire de façon algébrique (et abstraite) les raisonnements géométriques utilisés dans la remarque 1.25 (en particulier le fait que deux vecteurs non colinéaires engendrent un plan, et non l'espace). D'abord, on a envie de définir la notion de *dimension* d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de l'une des deux façons suivantes :

***Définitions 1.27* (provisoires).** — Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) On dit que $\dim(V) \leq n$ si V peut être engendré par n vecteurs, et que $\dim(V) = n$ si l'on a $\dim(V) \leq n$ mais $\dim(V) \not\leq n-1$, c.-à-d. si V peut être engendré par n vecteurs, mais pas par $n-1$ vecteurs.

b) On dit que $\dim(V) \geq n$ si V contient une famille libre de n vecteurs, et que $\dim(V) = n$ si l'on a $\dim(V) \geq n$ mais $\dim(V) \not\geq n+1$, c.-à-d. si V contient une famille libre de n vecteurs mais toute famille de $p > n$ vecteurs est liée.

Pour montrer que ces deux définitions sont équivalentes, on va démontrer la proposition-clé suivante. On va même en donner deux démonstrations !

Proposition 1.28. — *Si V est engendré par une famille $\mathscr{G} = (u_1, \dots, u_n)$ de n vecteurs , alors toute famille $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_p)$ de $p > n$ vecteurs est liée.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$ c'est clair : $\mathscr{F}$ est liée si l'un des v_i est nul et sinon on a $v_i = t_i u_1$ avec chaque $t_i \neq 0$ et l'on a donc la relation non triviale $t_2 v_1 - t_1 v_2 = 0$.

Soit donc $n \geq 2$ et supposons la proposition établie au cran $n-1$. Écrivons :

$$\begin{cases} v_1 &= a_{11}u_1 + \cdots + a_{n1}u_n \\ v_2 &= a_{12}u_1 + \cdots + a_{n2}u_n \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ v_p &= a_{1p}u_1 + \cdots + a_{np}u_n. \end{cases}$$

Si tous les coefficients a_{1j} de la 1ère colonne sont nuls, alors les v_i sont combinaison linéaire des $n-1$ vecteurs $u_2, \dots, u_n$, donc ils sont liés, d'après l'hypothèse de récurrence. On peut donc supposer qu'il existe un coefficient a_{1j} non nul et, quitte à renuméroter les v_j, on peut supposer que $j = 1$ i.e. que $a_{11} \neq 0$. Alors, pour $j = 2, \dots, p$, les $p-1$ vecteurs

$$v'_j = v_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} v_1$$

sont combinaison linéaire des $n-1$ vecteurs $u_2, \dots, u_n$, donc ils sont liés d'après l'hypothèse de récurrence (puisque $p-1 > n-1$). Donc il existe des scalaires non tous nuls $t_2, \dots, t_p$ tels que

$$0 = t_2 v'_2 + \cdots + t_p v'_p = t_2(v_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} v_1) + \cdots + t_p(v_p - \frac{a_{p1}}{a_{11}} v_1) = t_2 v_2 + \cdots + t_p v_p - (\sum_{j=2}^{p} t_j \frac{a_{j1}}{a_{11}}) v_1$$

et ceci montre que les v_j sont liés (puisque $t_2, \dots, t_p$ ne sont pas tous nuls). Ceci prouve la proposition. $\square$

Deuxième démonstration. — Donnons une deuxième démonstration, qui introduit la « méthode du pivot » pour les matrices. On peut exprimer « en colonnes » les v_j en fonction des u_i de la façon suivante :

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Si tous les coefficients a_{ij} sont nuls, alors tous les v_j sont nuls et la famille $\mathscr{F}$ est bien liée. On peut donc supposer qu'il existe un coefficient a_{rs} non nul, et quitte à renuméroter les u_i et les v_j, on peut supposer que $r = 1 = s$ i.e. que $a_{11} \neq 0$. Pour $j = 2, \ldots, p$, introduisons comme précédemment les $p-1$ vecteurs

$$v'_j = v_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} v_1,$$

ils s'expriment comme combinaison linéaire des vecteurs $u_2, \ldots, u_n$ et l'on obtient donc une nouvelle matrice :

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v'_2 & \cdots & v'_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

Si tous les coefficients a'_{ij} sont nuls, alors tous les v'_j sont nuls et donc la famille $\mathscr{F}$ est liée car on a par exemple $0 = v'_2 = v_2 - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} v_1$. On peut donc supposer qu'il existe un coefficient a'_{rs} non nul, et quitte à renuméroter les u_i et les v'_j pour $i \geq 2$ et $j \geq 2$, on peut supposer que $r = 2 = s$ i.e. que $a'_{22} \neq 0$. On peut alors répéter le processus : pour $j = 3, \ldots, p$, introduisons les $p-2$ vecteurs

$$v''_j = v'_j - \frac{a'_{2j}}{a'_{22}} v'_2 = v_j - V''_j,$$

où V''_j est une certaine combinaison linéaire de v_1 et v_2. Ces vecteurs $v''_3, \ldots, v''_n$ s'expriment comme combinaison linéaire des vecteurs $u_3, \ldots, u_n$ et l'on obtient donc une nouvelle matrice :

$$\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v'_2 & v''_3 & \cdots & v''_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a'_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & a''_{33} & \cdots & a''_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a'_{n2} & a''_{n3} & \cdots & a''_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

En continuant ainsi, le processus s'arrête à une étape $m \leq n$, où l'on obtient une matrice :

$$\begin{array}{c|ccccccc} & v_1 & v'_2 & \cdots & v_m^{(m-1)} & v_{m+1}^{(m)} & \cdots & v_p^{(m)} \\ \hline u_1 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_2 & a_{21} & a'_{22} & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_m & a_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a_{mm}^{(m-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_n & a_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a_{nm}^{(m-1)} & 0 & \cdots & 0 \end{array}$$

où la colonne $m+1$ est nulle. (Noter que $m+1 \leq n+1 \leq p$.) Ceci donne la relation linéaire $0 = v_{m+1}^{(m)} = v_{m+1}^{(m-1)} - \dfrac{a_{m,m+1}^{(m-1)}}{a_{m,m}^{(m-1)}} v_m^{(m-1)} = v_{m+1} - V_{m+1}^{(m-1)} - \dfrac{a_{m,m+1}^{(m-1)}}{a_{m,m}^{(m-1)}} v_m^{(m-1)}$ où, par construction,

$V_{m+1}^{(m-1)}$ est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_{m-1}$ et $v_m^{(m-1)} = v_m - V_m^{(m-1)}$ est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_m$. Comme le coefficient de v_{m+1} est 1 qui est $\neq 0$, ceci montre que $v_1, \dots, v_{m+1}$ sont liés donc que la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est liée. □

Démonstration de 1.26. — On peut maintenant démontrer le théorème 1.26. Supposons que V possède une base $\mathscr{B}$ formée de n éléments. Alors, d'après la proposition1.28 appliquée à $\mathscr{G} = \mathscr{B}$, toute famille de $p > n$ vecteurs de V est liée, donc toute base $\mathscr{B}'$ de V a au plus n éléments. Mais si une base $\mathscr{B}'$ était de cardinal[8] $m < n$, alors d'après 1.28 appliqué à $\mathscr{G} = \mathscr{B}'$ on aurait que $\mathscr{B}$ est liée, contradiction ! Donc toute base $\mathscr{B}'$ de V est de cardinal n. □

Afin de prouver l'existence de bases et de montrer l'équivalence des deux définitions 1.27, introduisons la :

Définition et proposition 1.29. — *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0\}$ et soit $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille d'éléments de V.*

(i) *On dit que $\mathscr{F}$ est une famille* génératrice minimale *si elle est génératrice et si on ne peut pas la rendre plus petite en lui enlevant un vecteur, c.-à-d. si pour tout $j \in I = \{1, \dots, n\}$ la famille $(v_i)_{i \in I - \{j\}}$ n'est pas génératrice. Ceci entraîne que $\mathscr{F}$ est aussi une famille libre, donc une base de V. En effet, sinon on aurait une relation linéaire $t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n = 0$ avec au moins un indice j tel que $t_j \neq 0$, d'où $v_j = t_j^{-1} \sum_{i \neq j} t_i v_i$ et donc tout $v \in V$, s'écrivant par hypothèse $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ s'écrirait déjà comme combinaison linéaire des v_i pour $i \neq j$ (en remplaçant le terme $a_j v_j$ par son expression en fonction des v_i pour $i \neq j$), et donc la famille $(v_i)_{i \in I - \{j\}}$ serait génératrice, contrairement à l'hypothèse.*

(ii) *On dit que $\mathscr{F}$ est une famille* libre maximale *si elle est libre et si on ne peut pas la rendre plus grande en lui rajoutant un autre vecteur, c.-à-d. si pour tout $v \in V$ la famille $(v_1, \dots, v_n, v)$ est liée. Ceci entraîne que $\mathscr{F}$ est aussi une famille génératrice, donc une base de V. En effet, pour tout $v \in V$ on a une relation linéaire non triviale $sv + t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n = 0$; on ne peut avoir $s = 0$ car sinon, puisque $\mathscr{F}$ est libre, on aurait $t_1 = 0 = \cdots = t_n$, donc $s \neq 0$ et donc $v = -s^{-1}(t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n)$. Ceci montre que $\mathscr{F}$ est génératrice, et comme elle est libre par hypothèse, c'est donc une base de V.*

(iii) *On a donc démontré :* $\boxed{\mathscr{F} \text{ libre maximale} \Rightarrow \mathscr{F} \text{ base} \Leftarrow \mathscr{F} \text{ génératrice minimale.}}$

(iv) *Notons au passage que les implications réciproques sont vraies, d'après la proposition 1.28 : si $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de V alors toute famille de $p > n$ vecteurs est liée donc $\mathscr{F}$ est libre maximale, et il ne peut exister de famille génératrice $\mathscr{G}$ de cardinal $m < n$ (car sinon $\mathscr{F}$ serait liée), donc $\mathscr{F}$ est génératrice minimale.*

(v) $\boxed{\text{Toute famille génératrice finie } (v_1, \dots, v_p) \text{ contient une famille génératrice minimale.}}$ *En effet, si $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_p)$ n'est pas minimale, elle contient une sous-famille génératrice $\mathscr{F}^1$ de cardinal $p - 1$, et si $\mathscr{F}^1$ n'est pas minimale, elle contient une sous-famille génératrice $\mathscr{F}^2$ de cardinal $p-2$, et ce processus doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes, ce qui donne une sous-famille génératrice et minimale. De façon plus sophistiquée, on peut considérer l'ensemble X des entiers r tels qu'il existe une sous-famille non vide $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ qui soit génératrice et de cardinal r. Alors X est contenu dans $\{1, \dots, p\}$ et est non vide car il contient p, donc X possède un plus petit élément n, alors il existe une sous-famille génératrice $\mathscr{G}$ de cardinal minimal n, donc $\mathscr{G}$ est génératrice minimale.*

Définition 1.30. — Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0\}$.

(1) On dit que V est *de dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_p)$.

(2) D'après le point (v) de 1.29, V possède alors une famille génératrice minimale $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$, qui est donc une base de V. Alors, d'après le théorème 1.26, toutes les bases de V sont de cardinal n : on dira que V est de dimension n et l'on écrira $\dim(V) = n$.[9]

Remarque 1.31. — Il existe des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie, par exemple, l'espace des polynômes $\mathbb{K}[X]$ ou, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou le sev des fonctions continues, ou dérivables, ou C^∞, etc., mais dans ce cours on s'intéressera principalement à ceux qui sont de dimension finie.

On obtient alors le théorème suivant, dont les points (i)–(iv) résument les résultats précédents :

---

[8] On dit qu'un ensemble est de *cardinal* n s'il a exactement n éléments.

[9] Par convention, l'espace vectoriel nul $\{0\}$ est de dimension 0 et l'ensemble vide $\varnothing$ en est une base.

(Q) ***Théorème 1.32.*** — *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul, de dimension finie.*

(i) *Il existe des bases de V, et toutes ont même cardinal n ; cet entier s'appelle la dimension de V sur $\mathbb{K}$ et se note* $\dim_{\mathbb{K}} V$ *ou simplement* $\dim V$.

(ii) *Toute famille génératrice de cardinal n est une base de V, de même que toute famille libre de cardinal n.*

(iii) *De toute famille génératrice finie $\mathscr{F}$ on peut extraire une base, en particulier $\mathscr{F}$ est de cardinal $\geq n$.*

(iv) *Toute famille libre est de cardinal $\leq n$; en d'autres termes : toute famille de cardinal $> n$ est liée.*

(v) « Th. de la base incomplète » *: Toute famille libre peut être complétée en une base de V.*

(vi) *Tout sev E de V est de dimension $m \leq n$; de plus si* $\dim E = n$, *alors $E = V$. En d'autres termes :* $\boxed{\textit{tout sous-espace vectoriel distinct de } V \textit{ est de dimension} < \dim V.}$

Démonstration. — Les points (i) à (iv) ont déjà été vus. Démontrons le point (v). Soit $\mathscr{L} = (v_1, \ldots, v_r)$ une famille libre. Si $r < n$ alors $\mathscr{L}$ n'est pas une base donc, d'après 1.29 (ii), n'est pas libre maximale donc est contenue dans une famille libre $\mathscr{L}^1 = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1})$ de cardinal $r + 1$. Si $r + 1 < n$ alors $\mathscr{L}^1$ n'est pas libre maximale donc est contenue dans une famille libre $\mathscr{L}^2 = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, v_{r+2})$ de cardinal $r + 2$, etc., et le processus s'arrête quand on a complété $\mathscr{L}$ en une famille libre maximale $\mathscr{L}^{n-r} = (v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n)$ qui est donc une base de V.

Prouvons (vi). Soit E un sous-espace vectoriel non nul de V. D'après (iv), toute famille libre d'éléments de E est de cardinal $\leq n = \dim V$, donc E possède une famille libre maximale $\mathscr{C}$, de cardinal $m \leq n$. Alors, d'après 1.29 (ii), $\mathscr{C}$ est une base de E, donc E est de dimension finie $m \leq n$. Si de plus $m = n$ alors, d'après le point (ii), $\mathscr{C}$ est une base de V, donc engendre V, d'où $E = V$. □

Exemples 1.33. — Reprenons les exemples de 1.23 et 1.24 : $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, $M_{p,q}(\mathbb{K})$ de dimension pq, et $\mathbb{K}_d[X]$ de dimension $d + 1$.

(Q) ***Définition 1.34*** **(Coordonnées relativement à une base)**. — Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de V. Alors tout $v \in V$ s'écrit de façon unique

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

et l'on dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les *coordonnées de v dans la base* $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Remarquons que c'est ici qu'on utilise de façon cruciale qu'une base de V est une *famille* $(v_1, \ldots, v_n)$ c.-à-d. que l'ordre dans lequel on énumère les vecteurs a de l'importance. Par exemple, si $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ est une base de V et si $v = v_1 + 2v_2$, alors les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$ sont $(1, 2)$. Mais $\mathscr{C} = (v_2, v_1)$ est une base de V distincte de $\mathscr{B}$, et les coordonnées de v dans $\mathscr{C}$ sont $(2, 1)$.