CHAPITRE 3

MATRICES, APPLICATIONS LINÉAIRES, SYSTÈMES LINÉAIRES, DÉTERMINANTS

Pour tout ce chapitre, on fixe un corps $\mathbb{K}$.

3.1. Matrices

Définitions 3.1. — Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$.

(1) On note $M_{p,q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ à p lignes et q colonnes, i.e.

$$M_{p,q}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Une telle matrice est notée en abrégé $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$. Si $q = p$, on écrit $M_p(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{pp}(\mathbb{K})$ et l'on écrit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,p}$; une telle matrice est dite « carrée de taille p ».

(2) $M_{p,q}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition et la multiplication par un scalaire définies par :

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} + (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} \qquad \text{et} \qquad t \cdot (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} = (ta_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}.$$

(3) On voit que $M_{p,q}(\mathbb{K})$ est de dimension pq. Plus précisément, pour tout i, j, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et colonne j, qui vaut 1. Ces matrices s'appellent les « *matrices élémentaires* » et forment une base de $M_{p,q}(\mathbb{K})$. En effet, toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des E_{ij}, à savoir $A = \sum_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} a_{ij} E_{ij}$.

Exemple 3.2. — Si $q = p = 2$, les matrices élémentaires sont :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3.1.1. Multiplication des matrices. — On peut multiplier deux matrices $A \in M_{pn}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{rq}(\mathbb{K})$ uniquement si $r = n$, c.-à-d., si le nombre de colonnes de la première égale le nombre de lignes de la seconde. On obtient alors une matrice $AB \in M_{pq}(\mathbb{K})$. Avant de donner la formule générale, illustrons ceci dans le cas où $p = 1$ et $q = 1$, i.e. lorsque A (resp. B) est une matrice ligne (resp. colonne). Dans ce cas, écrivant $A = (a_{*1}, a_{*2}, \cdots, a_{*n})$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1\bullet} \\ b_{2\bullet} \\ \vdots \\ b_{n\bullet} \end{pmatrix}$ on a :

$$(\star)\qquad \left\{ (a_{*1}, a_{*2}, \cdots, a_{*n}) \begin{pmatrix} b_{1\bullet} \\ b_{2\bullet} \\ \vdots \\ b_{n\bullet} \end{pmatrix} = a_{*1}b_{1\bullet} + a_{*2}b_{2\bullet} + \cdots + a_{*n}b_{n\bullet} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{*k}b_{k\bullet} \right.$$

On voit aussitôt que si $t \in \mathbb{K}$ et si $A' = (a'_{*1}, a_{*2}, \cdots, a'_{*n})$ et $B' = \begin{pmatrix} b'_{1\bullet} \\ b'_{2\bullet} \\ \vdots \\ b'_{n\bullet} \end{pmatrix}$ sont d'autres matrices ligne et colonne, on a les égalités :

$$(\ddagger)\qquad \begin{cases} (tA + A')B & = (ta_{*1} + a'_{*1})b_{1\bullet} + (ta_{*2} + a'_{*2})b_{2\bullet} + \cdots + (ta_{*n} + a'_{*n})b_{n\bullet} \\ & = t(a_{*1}b_{1\bullet} + a_{*2}b_{2\bullet} + \cdots + a_{*n}b_{n\bullet}) + a'_{*1}b_{1\bullet} + a'_{*2}b_{2\bullet} + \cdots + a'_{*n}b_{n\bullet} \\ & = tAB + A'B. \\ A(tB + B') & = a_{*1}(tb_{1\bullet} + b'_{1\bullet}) + a_{*2}(tb_{2\bullet} + b'_{2\bullet}) + \cdots + a_{*n}(tb_{n\bullet} + b'_{n\bullet}) \\ & = t(a_{*1}b_{1\bullet} + a_{*2}b_{2\bullet} + \cdots + a_{*n}b_{n\bullet}) + a_{*1}b'_{1\bullet} + a_{*2}b'_{2\bullet} + \cdots + a_{*n}b'_{n\bullet} \\ & = tAB + AB'. \end{cases}$$

Cette importante remarque étant faite, on peut maintenant donner la :

(Q) ***Définition 3.3.*** — Le produit de deux matrices $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,q}(\mathbb{K})$ est la matrice $P \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ où, pour chaque $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$, le coefficient P_{ij} est le produit de la i-ème ligne L_i de A par la j-ème colonne C_j de B, c.-à-d., remplaçant $*$ par i et $\bullet$ par j dans la formule $(\star)$, on a :

$$(\star)\qquad P_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Il résulte de cette définition que si on note $C_1, \dots, C_q$ les colonnes de B, alors la matrice $P = AB$ a pour colonnes les matrices colonnes AC_j. Donc, si l'on considère B comme la juxtaposition de ses colonnes en écrivant : $B = (C_1, \dots, C_q)$ alors on a $\boxed{AB = (AC_1, \dots, AC_q)}$.

(Q) ***Proposition 3.4.*** — *Soient $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$.*

(i) *Le produit matriciel $M_{p,n}(\mathbb{K}) \times M_{n,q}(\mathbb{K}) \to M_{p,q}(\mathbb{K})$ est* bilinéaire, *i.e. pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $A, A' \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B, B' \in M_{n,q}(\mathbb{K})$, on a :*

$$\boxed{(\alpha A + A')B = \alpha AB + A'B} \qquad et \qquad \boxed{A(\beta B + B') = \beta AB + AB'}.$$

(ii) *Le produit matriciel est* associatif *: pour tout $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,q}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$, on a $(AB)C = A(BC)$. On pourra donc omettre les parenthèses.*

(iii) *Soit $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres sont nuls. Alors $I_nB = B = BI_n$ pour tout $B \in M_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration. — Le point (i) découle aussitôt des égalités $(\ddagger)$: pour chaque couple d'indices (i, j), le coefficient d'indices (i, j) de $(\alpha A + A')B$ est $\alpha(AB)_{ij} + (A'B)_{ij}$, qui est le coefficient d'indices (i, j) de $\alpha AB + A'B$. On a donc $(\alpha A + A')B = \alpha AB + A'B$. Et de même $A(\beta B + B') = \beta AB + AB'$.

Pour prouver (ii), fixons $i \in \{1, \dots, p\}$ et $j \in \{1, \dots, r\}$. Alors, d'une part,

$$\big[(AB)C\big]_{ij} = \sum_{k=1}^{q} (AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell}B_{\ell k} \right) C_{kj} = \sum_{\substack{k=1,\dots,q \\ \ell=1,\dots,n}} A_{i\ell}B_{\ell k}C_{kj}.$$

Calculons maintenant $\big[A(BC)\big]_{ij}$. Comme les indices de sommation sont « muets » (i.e. leur nom n'a pas vraiment d'importance), on peut commencer par sommer sur $\ell = 1, \dots, n$ et l'on obtient :

$$\big[A(BC)\big]_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell}(BC)_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{n} A_{i\ell}\left(\sum_{k=1}^{q} B_{\ell k}C_{kj}\right) = \sum_{\substack{k=1,\dots,q\\ \ell=1,\dots,n}} A_{i\ell}B_{\ell k}C_{kj}.$$

On a donc $\big[(AB)C\big]_{ij} = \big[A(BC)\big]_{ij}$ pour tout i, j, d'où $(AB)C = A(BC)$.

Prouvons (iii). Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $(I_nB)_{ij} = \sum_{k=0}^{n}(I_n)_{ik}B_{kj}$; or le coefficient $(I_n)_{ik}$ vaut 1 si $k = i$ et 0 sinon, donc la somme précédente égale B_{ij}. Ceci prouve que $I_nB = B$. De même, $(BI_n)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} B_{ik}(I_n)_{kj}$ égale B_{ij} et donc $BI_n = B$. La proposition est démontrée. $\square$

Remarque 3.5. — Le produit de matrices n'est pas commutatif en général. D'abord, pour des raisons évidentes : si $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,q}(\mathbb{K})$ et si $q \neq p$, on peut former le produit AB mais pas le produit BA. Même si $q = p$, alors AB est une matrice carrée de taille p tandis que BA est une matrice carrée de taille n, et l'on peut avoir $p \neq n$. Même si $q = p = n$ on peut avoir $AB \neq BA$. Par exemple, pour $n = 2$ et $A = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{22} \neq AB$.

On a vu au chap. 1 qu'un groupe abélien $(A, +)$ muni d'une multiplication qui est associative, bi-additive et possède un élément unité s'appelle un anneau. D'après la proposition précédente, $M_n(\mathbb{K})$, muni de la multiplication des matrices, est donc un anneau (non-commutatif si $n \geq 2$), d'élément unité I_n. De plus, il a la propriété supplémentaire d'être un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que la multiplication soit bilinéaire. Pour rendre compte de cela, on introduit la définition suivante :

Définition 3.6. — Une $\mathbb{K}$-*algèbre* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni d'une multiplication $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto xy$ vérifiant les propriétés suivantes :

(a) Elle est *associative* : pour tout $x, y, z \in A$, $(xy)z = x(yz)$ et donc on peut omettre les parenthèses.
(u) Elle possède un *élément unité*, noté 1, tel que $1x = x = x1$, pour tout $x \in A$.
(b) La multiplication est *bilinéaire*, i.e. linéaire en chaque facteur : pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, x', y, y' \in A$, on a : $(\alpha x + x')y = \alpha xy + x'y$ et $x(\beta y + y') = \beta xy + xy'$.

En particulier, $M_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, d'élément unité I_n. Notons que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $B \in M_n(\mathbb{K})$, on a $(\alpha I_n)B = \alpha(I_nB) = \alpha B$ et de même $B(\alpha I_n) = \alpha(BI_n) = \alpha B$.

***Remarque 3.7* (Produits de matrices élémentaires)**. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons des matrices élémentaires E_{ij} et $E_{k\ell}$ dans $M_n(\mathbb{K})$. Calculons le produit $P = E_{ij}E_{k\ell}$. Il résulte de la formule $(\star)$ que :

(1) Comme toutes les lignes de E_{ij} sont nulles sauf la i-ème, il en est de même pour les lignes de P.
(2) Comme toutes les colonnes de $E_{k\ell}$ sont nulles sauf la ℓ-ème, il en est de même des colonnes de P.
(3) Donc le seul coefficient éventuellement non nul de P est celui d'indices (i, ℓ), égal au produit de la i-ème ligne L_i de E_{ij} par la ℓ-ème colonne C_ℓ de $E_{k\ell}$, et qui vaut donc : 1 (seul coeff. non nul de L_i, situé à la j-ème place) fois le j-ème coeff. de C_ℓ, lequel vaut 1 si $j = k$ et vaut 0 sinon. Ceci montre que $E_{ij}E_{k\ell} = \begin{cases} E_{i\ell} & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
(4) Pour $i \neq j$, on a donc $E_{ij}E_{ji} = E_{ii}$, tandis que $E_{ji}E_{ij} = E_{jj} \neq E_{ii}$.

3.2. Matrices et applications linéaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Désormais, on notera les éléments de $\mathbb{K}^n$ comme des vecteurs colonnes $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Alors, la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est formée des vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Q) ***Proposition 3.8.*** — *Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.*

(i) *A définit une application linéaire $\phi = \phi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, définie par $\phi(v) = Av$.*

(ii) *Pour tout $j = 1, \dots, n$, on a $\phi(e_j) = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{pj} \end{pmatrix}$ = la j-ème colonne C_j de A.*

(iii) *Pour tout vecteur $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, on a $\phi(v) = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n$.*

(iv) *Lorsque $A = I_n$ (auquel cas $p = n$), l'application ϕ_A est l'application identité de $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. — Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $v, v' \in \mathbb{K}^n$, considérés comme des matrices colonnes. Par linéarité à droite du produit matriciel, on a $A(\alpha v + v') = \alpha Av + Av'$, ce qui prouve que l'application $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, $v \mapsto Av$ est linéaire.

D'après la définition ($\star$) du produit matriciel et de la matrice colonne e_j, pour toute matrice ligne $L = (a_{*1}, a_{*2}, \cdots, a_{*n})$ on a $Le_j = a_{*j}$, i.e. Le_j est le scalaire situé sur la j-ème colonne de L. Appliquant ceci aux lignes de A, on obtient que $Ae_j = C_j$, et (iii) en découle par linéarité de ϕ. Enfin, si $A = I_n$ alors $C_j = e_j$ pour tout j, donc ϕ est l'application identité. □

(Q) ***Définition et proposition 3.9.*** — *Soient V, W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : V \to W$ une application linéaire.*

(i) *On note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images $f(x)$, lorsque x parcourt V. C'est un sev de W.*

(ii) *Supposons V de dimension finie. On appelle* rang *de ϕ et l'on note $\mathrm{rang}(\phi)$ la dimension de $\mathrm{Im}(\phi)$; celle-ci est $\leq \dim(V)$. Si de plus W est de dimension finie, on a $\mathrm{rang}(\phi) \leq \min(\dim(V), \dim(W))$.*

Démonstration. — Prouvons (i). On a $0_W = f(0_V) \in \mathrm{Im}(f)$ et si $t \in \mathbb{K}$ et $y, y' \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x, x' \in V$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$; comme f est linéaire on a $f(tx + x') = tf(x) + f(x') = ty + y'$, donc $ty + y' \in \mathrm{Im}(f)$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de W.

Prouvons (ii). Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V. Alors la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$ (car si $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ alors $f(v) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)$), donc $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension $p \leq n$. Si de plus W est de dimension finie m alors, d'après le « théorème fondamental des espaces vectoriels de dimension finie » 1.32, on a $p \leq m$ et donc $\mathrm{rang}(f) = p \leq \min(\dim(V), \dim(W))$. □

(Q) ***Théorème 3.10* (Théorème du rang).** — *Soit $f : V \to W$ une application linéaire. On suppose V de dimension finie n. Alors $\boxed{\mathrm{rang}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = n}$.*

Démonstration. — Comme V est de dimension finie n, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension finie $d \leq n$. Fixons une base $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_d)$ de $\mathrm{Ker}(f)$.

1ère méthode (la plus courte). Complétons $\mathscr{C}$ en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n)$ de V. Alors $\mathrm{Im}(f) = f(V)$ est engendré par $f(e_1), \dots, f(e_n)$ (d'après la démonstration de 3.9), donc par $f(e_{d+1}), \dots, f(e_n)$ puisque $f(e_i) = 0$ pour $i \leq d$. Montrons que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Supposons qu'on ait une relation de dépendance linéaire

$$0 = t_1 f(e_{d+1}) + \cdots + t_{n-d} f(e_n) = f(t_1 e_{d+1} + \cdots + t_{n-d} e_n),$$

alors le vecteur $t_1 e_{d+1} + \cdots + t_{n-d} e_n$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$, donc est combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_d$, d'où une égalité

$$t_1 e_{d+1} + \cdots + t_{n-d} e_n - s_1 e_1 - \cdots - s_d e_d = 0.$$

Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de V, ceci implique $t_i = 0 = s_j$ pour tous i, j. Ceci montre que les vecteurs $f(e_{d+1}), \ldots, f(e_n)$ sont linéairement indépendants, donc forment une base de $f(V)$, d'où $\dim f(V) = n - d$ et donc $\mathrm{rang}(f) = \dim f(V) = n - \dim \mathrm{Ker}(f)$.

2ème méthode. Donnons une autre démonstration. (Elle prouve le résultat plus précis suivant : si une base $(w_1, \ldots, w_r)$ de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée et si $v_1, \ldots, v_r \in V$ vérifient $f(v_i) = w_i$ pour $i = 1, \ldots, r$, alors $(e_1, \ldots, e_d, v_1, \ldots, v_r)$ est une base de V.) Comme $\mathrm{Im}(f) = f(V)$ est engendré par n éléments (les images d'une base de V), $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie $r \leq n$. Soit $(w_1, \ldots, w_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ et pour $i = 1, \ldots, r$, soit v_i un élément de V tel que $f(v_i) = w_i$. Alors la famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_d, v_1, \ldots, v_r)$ est une base de V. En effet, elle est *génératrice* : soit $v \in V$ arbitraire, son image $f(v)$ s'écrit $f(v) = t_1 w_1 + \cdots + t_r w_r$, d'où $f(v - t_1 v_1 - \cdots - t_r v_r) = 0$, donc $v - t_1 v_1 - \cdots - t_r v_r$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$, donc s'écrit $s_1 e_1 + \cdots + s_p e_p$, d'où

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_r v_r + s_1 e_1 + \cdots + s_p e_p.$$

Ceci montre que $\mathscr{B}$ est génératrice. Elle est aussi *libre* : si

$$0 = t_1 v_1 + \cdots + t_r v_r + s_1 e_1 + \cdots + s_p e_p$$

alors $0 = f(0) = t_1 w_1 + \cdots + t_r w_r$, donc chaque t_i est nul (puisque $(w_1, \ldots, w_r)$ est libre), d'où $0 = s_1 e_1 + \cdots + s_p e_p$, donc chaque s_j est nul (puisque $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre). Ceci montre que $\mathscr{B}$ est aussi libre, donc est une base de V. Donc $\dim V = d + r = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)$. □

(Q)

Définition et proposition 3.11 **(Image, rang et noyau d'une matrice)** *Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et soit ϕ l'application linéaire $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ associée.*

(i) *On note* $\mathrm{Ker}(A)$ *le noyau de ϕ, i.e. l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{K}^n$ tels que $Av = 0$. C'est un sev de $\mathbb{K}^n$.*

(ii) *On note* $\mathrm{Im}(A)$ *l'image de ϕ, i.e. le sev de $\mathbb{K}^p$ formé des images Av, et* $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\phi) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

(iii) $\mathrm{rang}(A)$ *est la dimension du sev de $\mathbb{K}^p$ engendré par les colonnes $C_1, \ldots, C_n$ de A.*

(iv) $\mathrm{rang}(A)$ *est le nombre maximum de colonnes de A qui sont linéairement indépendantes.*

Démonstration. — Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors $E = \mathrm{Im}(\phi)$ est engendré par les vecteurs $\phi(e_i) \in \mathbb{K}^p$, qui sont les colonnes de A. Ceci prouve (iii).

De plus, on peut extraire de la famille génératrice $(C_1, \ldots, C_n)$ de E une base, de cardinal $r = \dim(E)$, ce qui donne r colonnes linéairement indépendantes. De plus, dans E toute famille de cardinal $> r$ est liée, en particulier r est le nombre maximum de colonnes de A qui sont linéairement indépendantes. □

3.3. Systèmes linéaires : théorie

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour $i = 1, \ldots, p$ et $j = 1, \ldots, n$, soient a_{ij} et b_i des éléments de $\mathbb{K}$. On considère le système linéaire $\mathscr{S}$ à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{K}$ ci-dessous :

$$(\mathscr{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p \end{array} \right.$$

En introduisant les vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ et la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$, ceci équivaut au système matriciel

$$(*) \qquad AX = b.$$

Si $b = 0$ (i.e. si $b_i = 0$ pour tout i) on dit que le système est *homogène*. Si $b \neq 0$, on dit que l'on a un système *avec second membre*. On lui associe alors le système homogène $AX = 0$, noté $\mathscr{S}_0$.

(Q) ***Définitions 3.12*** **(Rang d'un système linéaire)**. — Considérons le système homogène $\mathscr{S}_0$:

$$(\mathscr{S}_0) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

(1) On dit que les lignes $L_1, \dots, L_p$ de ce système, ou que les équations correspondantes, sont *liées* s'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que l'équation

$$\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_p L_p : \qquad \Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{i1}\Big)x_1 + \Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{i2}\Big)x_2 + \cdots + \Big(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{in}\Big)x_n = 0$$

soit l'équation nulle, i.e. que les coefficients $a'_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{ij}$ soient nuls pour $j = 1, \dots, n$. Si c'est le cas et si par exemple $\alpha_p \neq 0$, alors on peut écrire que $L_p = (-1/\alpha_p)\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i L_i$ donc l'équation L_p est conséquence des autres, et donc le système $\mathscr{S}_0$ est équivalent au système obtenu en ne gardant que les autres équations.

(2) D'après la définition précédente, on voit que les lignes du système sont liées (ou linéairement indépendantes), si et seulement si les lignes de la matrice A le sont, considérées comme éléments de l'espace vectoriel des matrices lignes.

(3) On appelle *rang* du système linéaire $\mathscr{S}$ et l'on note $\mathrm{rang}(\mathscr{S})$ le nombre maximum de lignes du système homogène $\mathscr{S}_0$ qui sont linéairement indépendantes, c.-à-d. le nombre maximum de lignes de A qui sont linéairement indépendantes. On verra dans la section suivante que $\mathrm{rang}(\mathscr{S}) = \mathrm{rang}(A)$.

D'un point de vue théorique, les choses sont très simples à énoncer. L'application $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, $X \mapsto AX$ est linéaire et, pour $b \in \mathbb{K}^p$ donné, on veut déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_b$ des antécédents X de b par ϕ. Pour $b = 0$, $\mathscr{E}_0 = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0\}$ n'est autre que $\mathrm{Ker}(A)$. Pour $b \in \mathbb{K}^p$ arbitraire, on obtient d'après 2.12 le théorème suivant :

(Q) ***Théorème 3.13***. — *Soit $\mathscr{E}_b$ l'ensemble des solutions du système $\mathscr{S}$, écrit sous forme matricielle $AX = b$, avec $b \in \mathbb{K}^p$ et $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ donnés et $X \in \mathbb{K}^n$ le vecteur des inconnues. Posons $E = \mathrm{Ker}(A)$.*

(i) *$E = \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0\}$ égale $\mathscr{E}_0$, l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$.*

(ii) *Si $b \notin \mathrm{Im}(A)$, alors $\mathscr{E}_b = \varnothing$.*

(iii) *Si $b \in \mathrm{Im}(A)$ et si X_0 est une solution quelconque, alors $\mathscr{E}_b$ est le sous-espace affine de $\mathbb{K}^n$ de direction E ci-dessous :*

$$\mathscr{E}_b = X_0 + E = \{X_1 = X_0 + X \mid X \in E\} = \{X_1 \in \mathbb{K}^n \mid X_1 - X_0 \in E\}.$$

Pour résoudre effectivement le système $\mathscr{S}$, il faut donc déterminer explicitement $\mathrm{Ker}(A)$ et savoir décider si b appartient à $\mathrm{Im}(A)$. Ceci est l'objet de la section suivante, où l'on introduit une technique de résolution des systèmes $\mathscr{S}_0$ et $\mathscr{S}$.

3.4. Algorithme du pivot de Gauss et matrices échelonnées

3.4.0. Commençons par quelques mots sur la notion d'*algorithme*. Un algorithme est une description précise d'une suite d'opérations à effectuer, dans quel ordre et dans quels cas, qui aboutit au bout d'un nombre fini d'étapes (ce nombre étant si possible connu à l'avance) au résultat voulu. Il y a deux raisons pour introduire un algorithme dans le contexte de la résolution des systèmes linéaires.

La première raison est que l'on peut certes résoudre les systèmes 2×2 ou 3×3 par des manipulations *ad hoc* des équations : exprimer une inconnue en fonction des autres puis remplacer dans les autres équations, ou additions ou soustractions d'équations qui aboutissent à un résultat après un plus ou moins grand nombre d'opérations. Or l'expérience montre que ces opérations, menées « au petit bonheur la chance », introduisent parfois des étapes inutiles (i.e. on passe deux étapes à « défaire » ce qu'on a fait dans deux étapes précédentes) et sont source d'erreurs de calculs. Illustrons ceci par la mise en garde suivante.

Mise en garde 3.14. — Lorsqu'on veut résoudre un système $\mathscr{S}$ en le transformant en un système $\mathscr{S}'$ a priori plus simple, il est **essentiel** de s'assurer que l'on ne modifie pas l'ensemble des solutions, c.-à-d. que le passage de $\mathscr{S}$ à $\mathscr{S}'$ ne nous a pas fait « oublier » de solutions, ou n'a pas rajouté de solutions (en « oubliant » des équations). Voici un exemple de ce qu'il ne faut **pas** faire. Considérons le système :

$$(\mathscr{S}) \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 0 & (L_1) \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 & (L_2) \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 0 & (L_3) \end{cases}$$

En faisant $L_1 - L_2$ (pour éliminer x_2) et $L_2 - L_3$ (pour éliminer x_1) et $L_3 - L_1$ (pour éliminer x_3 on obtient :

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{qui équivaut à} \qquad x_1 = x_3 = -x_2.$$

Or, en procédant « correctement » et en utilisant dans cet exemple l'algorithme qui va être décrit plus bas dans le cas général, on obtient ce qui suit. Remplaçant L_2 par $L_2' = L_2 - L_3$ et L_1 par $L' = L_1 - 2L_3$ (pour éliminer x_1 dans ces deux équations), on obtient le système

$$(\mathscr{S}') \qquad \begin{cases} -x_3 = 0 & (L_1') \\ x_2 + x_3 = 0 & (L_2') \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 & (L_3) \end{cases}$$

et ce système est bien *équivalent* au système $\mathscr{S}$ initial, car en faisant $L_1' + 2L_3$ (resp. $L_2' + L_3$) on retrouve la ligne L_1 (resp. L_2) de départ, i.e. les changements effectués sont *réversibles.* Et le système $\mathscr{S}'$ se résout facilement : $x_3 = 0$, puis $x_2 = 0$ et $x_1 = 0$, donc la seule solution est $(0, 0, 0)$.

La seconde raison pour introduire un algorithme « bien déterminé » est que dans les applications pratiques de l'algèbre linéaire, lesquelles sont extrêmement nombreuses et importantes, les systèmes à résoudre sont énormes (des milliers, voire des millions d'équations et d'inconnues) et qu'il n'est pas question d'effectuer les calculs à la main. Ce sont des ordinateurs qui s'en chargent, et ces derniers ont besoin de programmes, lesquels sont la traduction en tel ou tel langage informatique d'un algorithme mathématique.

3.4.1. Pivot de Gauss. — L'algorithme qu'on va introduire s'appelle *algorithme du pivot de Gauss.* Il consiste à mettre le système $\mathscr{S}$ sous une forme « échelonnée », c.-à-d., où les lignes successives contiennent de moins en moins d'inconnues, au moyen de trois opérations élémentaires :

(1) Multiplier une ligne L_i par un scalaire $\alpha \neq 0$.

(2) Ajouter à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j, c.-à-d. remplacer L_i par $L_i + \alpha L_j$, avec $j \neq i$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

(3) Échanger deux lignes L_i et L_j.

***Remarque 3.15* (essentielle).** — On voit aussitôt que si $X = (x_1, \dots, x_n)$ est solution de $\mathscr{S}$ alors c'est aussi une solution du système $\mathscr{S}'$ obtenu en effectuant l'une quelconque des trois opérations précédentes. *Réciproquement*, si X est une solution de $\mathscr{S}'$, c'est aussi une solution de $\mathscr{S}$ car $\mathscr{S}$ se déduit de $\mathscr{S}'$ en effectuant l'opération inverse de celle effectuée :

(1) En multipliant $L_i' = \alpha L_i$ par le scalaire α^{-1}, on retrouve bien L_i.

(2) Comme $L_j' = L_j$ n'a pas changé, en ajoutant $-\alpha L_j' = -\alpha L_j$ à $L_i' = L_i + \alpha L_j$, on retombe bien sur L_i.

(3) En échangeant à nouveau $L_i' = L_j$ et $L_j' = L_i$, on retombe bien sur $\mathscr{S}$.

On voit donc que $\mathscr{S}$ et tous les systèmes déduits de $\mathscr{S}$ par une suite d'opérations élémentaires, ont les mêmes solutions. On dira que ces systèmes sont *équivalents.*

Algorithme 3.16. — Revenons à notre système à p équations et n inconnues :

$$(\mathscr{S}) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p \end{cases}$$

et expliquons le détail de l'algorithme, qui consiste à faire disparaître à chaque étape une inconnue de toutes les équations sauf une. Les sous-étapes sont les suivantes :

a) Si tous les coefficients a_{i1} de la 1ère colonne sont nuls, alors l'inconnue x_1 n'intervient pas, et on passe directement à l'étape suivante, pour l'inconnue x_2.

b) S'il existe un indice de ligne i_0 tel que $a_{i_0 1} \neq 0$, on multiplie l'équation L_{i_0} par $1/a_{i_0 1}$ puis on l'échange (si $i_0 > 1$) avec l'équation L_1. On obtient ainsi un nouveau système $\mathscr{S}'$ dont le coefficient a'_{11} vaut 1. (On dit que l'on prend ce coefficient comme pivot, ou que la case $(1,1)$ de la matrice est une position de pivot.)

c) Dans chaque ligne L'_i avec $i > 1$, on annule le coefficient a'_{i1} en le remplaçant par $a'_{i1} - a'_{i1} \cdot 1$, i.e. on remplace l'équation L'_i par $L'_i - a'_{i1}L'_1$. On obtient ainsi un système $\mathscr{S}''$ dont la 1ère colonne est nulle, à l'exception du coefficient $a''_{11} = 1$.

Appelons $\mathscr{S}_1$ le système $\mathscr{S}''$ ainsi obtenu, et par abus de notation désignons à nouveau par a_{ij} ses coefficients (au lieu de a''_{ij}). On passe alors à l'étape suivante pour l'inconnue x_2, « en laissant de côté la 1ère équation », c.-à-d. :

a) Si tous les coefficients a_{i2} de la 2ème colonne sont nuls pour $i \geq 2$, alors l'inconnue x_2 n'intervient pas dans les équations L_2 à L_p et on passe directement à l'étape suivante, pour l'inconnue x_3.

b) S'il existe un indice de ligne $i_1 \geq 2$ tel que $a_{i_1 2} \neq 0$, on multiplie l'équation L_{i_1} par $1/a_{i_1 2}$ puis on l'échange (si $i_1 > 2$) avec l'équation L_2. On obtient ainsi un nouveau système $\mathscr{S}'_1$ dont le coefficient a'_{22} vaut 1.

c) Dans chaque ligne L'_i avec $i > 2$, on annule le coefficient a'_{i2} en le remplaçant par $a'_{i2} - a'_{i2} \cdot 1$, i.e. on remplace l'équation L'_i par $L'_i - a'_{i2}L'_2$. On obtient ainsi un système $\mathscr{S}''_1$ dont la 2ème colonne est nulle, à l'exception du coefficient a''_{12} de la 1ère ligne (qui est conservée intacte) et du coefficient a''_{22} qui vaut 1.

On passe alors à l'étape suivante pour l'inconnue x_3, etc. Insistons ici sur le fait qu'on effectue ces opérations sur chaque ligne du système en *incluant le second membre*, voir ce qui suit.

(†) **Supposons** (pour simplifier l'écriture) qu'à chaque étape E_i l'inconnue x_i intervienne « vraiment ». On obtient après un certain nombre d'étapes $r \leq p$ un système final de la forme suivante (par abus de notation, les coefficients sont encore désignés par a'_{ij}) :

$$(\mathscr{S}^{\text{fin}}) \qquad \begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1r}x_r + \cdots + a'_{1n}x_n & = & c_1 = f_1(b_1, \ldots, b_p) \\ x_2 + \cdots + a'_{2r}x_r + \cdots + a'_{2n}x_n & = & c_2 = f_2(b_1, \ldots, b_p) \\ \ddots & \vdots & \vdots \\ x_r + \cdots + a'_{rn}x_n & = & c_r = f_r(b_1, \ldots, b_p) \\ 0 & = & c_{r+1} = f_{r+1}(b_1, \ldots, b_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & = & c_p = f_p(b_1, \ldots, b_p) \end{cases}$$

où, au second membre, chaque c_j est une combinaison linéaire $f_j(b_1, \ldots, b_p) = \alpha_{j1}b_1 + \cdots + \alpha_{jp}b_p$ dépendant des opérations effectuées (voir les exemples plus bas).

Conclusions : On voit alors que si le système $\mathscr{S}$ a des solutions, alors le second membre b doit vérifier les $(p-r)$ équations linéaires $(*)$ $f_i(b) = 0$ pour $i = r+1, \ldots, p$. Réciproquement, si b vérifie ces équations, alors le système $\mathscr{S}^{\text{fin}}$ possède des solutions, donc $\mathscr{S}$ aussi. Notant A la matrice du système on obtient donc le résultat important suivant :

(Q) ***Proposition 3.17.*** — $\boxed{\textit{Le vecteur } b \in \mathbb{K}^p \textit{ appartient à } \mathrm{Im}(A) \iff f_{r+1}(b) = 0 = \cdots = f_p(b).}$

En d'autres termes :

$$\boxed{\textit{Le sev } \mathrm{Im}(A) \textit{ de } \mathbb{K}^p \textit{ est défini par les équations linéaires } f_{r+1} = 0 = \cdots = f_p.}$$

De plus, les solutions de $\mathscr{S}^{\text{fin}}$ et donc de $\mathscr{S}$ sont obtenues explicitement comme suit. On peut choisir arbitrairement les variables $x_{r+1}, \ldots, x_n$, qu'on appelle donc *variables libres* ; alors d'après la ligne r de $\mathscr{S}^{\text{fin}}$, x_r s'exprime en fonction de $x_{r+1}, \ldots, x_n$ et de la constante c_r, puis d'après la ligne $r-1$, x_{r-1} s'exprime en fonction de $x_r, \ldots, x_n$ et de c_{r-1}, donc en fonction de $x_{r+1}, \ldots, x_n$ et des constantes c_{r-1}, c_r, etc. Dans ce polycopié, on dira alors que $x_1, \ldots, x_r$ sont les *variables liées*. Attention, dans la litérature elles sont appelées *variables essentielles*, mais l'auteur de ces lignes ne trouve pas cette terminologie très pertinente. On obtient ainsi une *représentation « paramétrique »* de l'ensemble des solutions, dépendant des « paramètres » $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

En particulier, pour $b = 0$, on obtient une représentation paramétrique du sev $\mathrm{Ker}(A)$ de $\mathbb{K}^n$: c'est le sev formé des vecteurs $X = (x_1, \ldots, x_n)$ dont les coordonnées $x_1, \ldots, x_r$ s'expriment linéairement, par le système homogène $\mathscr{S}_0^{\text{fin}}$ ci-dessous, en fonction des « paramètres » $x_{r+1}, \ldots, x_n$, choisis arbitrairement :

$$(\mathscr{S}_0^{\text{fin}}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1r}x_r + \cdots + a'_{1n}x_n & = & 0 \\ x_2 + \cdots + a'_{2r}x_r + \cdots + a'_{2n}x_n & = & 0 \\ \ddots \qquad\qquad & \vdots & \vdots \\ x_r + \cdots + a'_{rn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

On obtient donc la :

(Q) ***Proposition 3.18***. — $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(A) = n - r.}$ *Plus précisément, pour $j = 1, \ldots, n-r$, notons X_j l'unique élément de* $\mathrm{Ker}(A)$ *dont les coordonnées libres* $(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ *valent toutes* 0 *sauf* x_{r+j} *qui vaut* 1. *Alors :* $\boxed{(X_1, \ldots, X_{n-r}) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(A).}$

Démonstration. — En effet, soit X un élément arbitraire de $\mathrm{Ker}(A)$ et soient $(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ ses $(n-r)$ dernières coordonnées. Alors $X - x_{r+1}X_1 - \cdots - x_nX_{n-r}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A)$, donc vérifie $\mathscr{S}_0^{\text{fin}}$, et il a ses $(n-r)$ dernières coordonnées nulles, donc c'est le vecteur nul. Donc $X = x_{r+1}X_1 + \cdots + x_nX_{n-r}$. □

***Définition 3.19* (Opérations sur les lignes de la matrice augmentée)**

(Q) Dans ce qui précède, on a écrit explicitement les systèmes transformés. En fait, on peut gagner du temps en associant au système $\mathscr{S}$ avec second membre b la *matrice « augmentée »* :

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{22} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array} \right)$$

et l'on peut se contenter de faire les opérations sur les lignes de cette matrice, sans récrire à chaque fois les inconnues $x_1, \ldots, x_n$. En effectuant les opérations décrites précédemment, on arrive à la fin à une matrice transformée qui est la matrice augmentée du système $\mathscr{S}^{\text{fin}}$:

$$(A_r \mid c) = \left(\begin{array}{cccccc|l} \boxed{1} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & \cdots & a'_{1n} & c_1 = f_1(b) \\ 0 & \boxed{1} & \cdots & a'_{2r} & \cdots & a'_{2n} & c_2 = f_2(b) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & \cdots & a'_{rn} & c_r = f_r(b) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1} = f_{r+1}(b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & c_p = f_p(b) \end{array} \right)$$

et l'on peut donc lire directement sur cette matrice toutes les informations données précédemment sur les systèmes $\mathscr{S}^{\text{fin}}$ et $\mathscr{S}$, à savoir qu'il y a des solutions si et seulement si $f_j(b) = 0$ pour $j = r+1, \ldots, p$ (ce qui est la condition pour que $b \in \mathrm{Im}(A)$), et que dans ce cas l'ensemble des solutions est un sous-espace affine $\mathscr{E}_b$ de $\mathbb{K}^p$ de direction le sev $\mathrm{Ker}(A)$, lequel est donné sous forme paramétrique par le système homogène $\mathscr{S}_0^{\text{fin}}$.

Exemple 3.20. — Illustrons ce qui précède pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le système suivant :

$$(\mathscr{S}) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \quad (L_1) \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= b_2 \quad (L_2) \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= b_3 \quad (L_3) \end{aligned} \right. \qquad \text{d'où la matrice augmentée} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 4 & 5 & 6 & b_2 \\ 7 & 8 & 9 & b_3 \end{array} \right)$$

Prenons le coefficient $1 = a_{11}$ comme 1er pivot; alors remplaçant L_2 par $L_2 - 4L_1$ (dans ce polycopié on notera $L_2 \to L_2 - 4L_1$, mais d'autres auteurs notent $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$) et L_3 par $L_3 - 7L_1$ on obtient :

$$(A' \mid b') = \left(\begin{array}{ccc|l} \boxed{1} & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b'_2 = b_2 - 4b_1 \\ 0 & -6 & -12 & b'_3 = b_3 - 7b_1 \end{array} \right).$$

Prenons alors le coefficient $a_{22} = -3$ comme pivot. Remplaçant L'_2 et L'_3 par $-L'_2/3$ et $L'_3 - 2L'_2$ respectivement, on obtient :

$$(A_2 \mid c) = \left(\begin{array}{ccc|l} \boxed{1} & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & c_2 = (4b_1 - b_2)/3 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 = b'_3 - 2b'_2 = b_3 - 2b_2 + b_1 \end{array} \right).$$

On obtient donc que $\mathrm{Im}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \mid b_3 - 2b_2 + b_1 = 0\}$, tandis que $\mathrm{Ker}(A)$ est le sev de $\mathbb{R}^3$ déterminé par le système

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right. \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= -2x_3 \\ x_1 &= -2x_2 - 3x_3 = x_3 \end{aligned} \right.$$

donc c'est la droite D engendrée par le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Enfin, pour tout $b \in \mathrm{Im}(A)$, une solution particulière est obtenue en faisant $x_3 = 0$, d'où $x_2 = (4b_1 - b_2)/3$ et $x_1 = b_1 - 2x_2 = (-1/3)(5b_1 + 2b_2)$, donc l'ensemble des solutions est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $I_0 = (\dfrac{-5b_1 - 2b_2}{3}, \dfrac{4b_1 - b_2}{3}, 0)$ et de direction $D = \mathbb{R}u$, i.e. c'est la droite affine

$$\mathscr{D} = I_0 + \mathbb{R}u = \{(\frac{-5b_1 - 2b_2}{3} + x, \frac{4b_1 - b_2}{3} - 2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

***Remarque 3.21* (sur l'hypothèse (†)).** — Dans ce qui précéde on avait fait, pour simplifier l'écriture, l'hypothèse (†) : à chaque étape E_i l'inconnue x_i intervient vraiment. Expliquons ce qui se passe sans cette hypothèse. Les seules différences sont que :

(1) À la fin, au lieu d'une matrice non augmentée de la forme : $\left(\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & * & * & * & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(Q) où dans chaque ligne L_i, pour $i = 1, \dots, r$, le pivot $\boxed{1}$ est à la i-ème place, on obtient, plus généralement, une matrice non augmentée de la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} 0 & \boxed{1} & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

i.e. chaque ligne L_i « commence » avec le pivot $\boxed{1}$ à la place k_i, et $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$. Alors, les 0 à gauche ou en dessous des pivots forment un « escalier » dont les « marches » sont de largeurs variables (dans le cas (†) toutes les marches étaient de largeur 1). C'est la raison pour laquelle une telle matrice s'appelle une matrice *échelonnée*.

(Q) (2) Les *variables libres* (resp. les *variables liées*) sont les variables x_j pour les indices j tels que la colonne C_j ne contient pas (resp. contient) un pivot $\boxed{1}$. (Sous l'hypothèse (†), les r pivots occupaient les r premières colonnes et les variables libres étaient donc $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Dans l'exemple de la matrice ci-dessus, $n = 10$, $p = 6$, $r = 4$ et les variables libres sont $x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{10}$, tandis que les variables liées sont x_2, x_4, x_6, x_8.) On obtient comme précédemment que : $\boxed{\dim \operatorname{Ker}(A) = n - r}$ et si, pour $k = 1, \ldots, n-r$, on note X_k l'unique élément de $\operatorname{Ker}(A)$ dont toutes les coordonnées libres $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}})$ sont nulles sauf la k-ème d'entre elles x_{j_k} qui vaut 1, alors : $\boxed{(X_1, \ldots, X_{n-r}) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(A).}$

Enfin, la prop. 3.17 est *inchangée* : $\boxed{\operatorname{Im}(A) \text{ est définie par les équations } f_i(b) = 0 \text{ pour } i > r.}$

***Exemple 3.22* (sans l'hypothèse (†)).** — Illustrons ce qui précède par l'exemple du système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 + x_6 = b_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 + 4x_6 = b_2 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 8x_6 = b_3 \end{cases}$$

La matrice augmentée est $(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 & b_2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 8 & 8 & b_3 \end{array}\right)$ et en faisant $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - 5L_1$ on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & b_3 - 5b_1 \end{array}\right)$$

puis $L_3' \to L_3' - 2L_2'$ donne $\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & b_3 - 2b_2 - b_1 \end{array}\right)$. Il n'y a pas de lignes de 0 donc $\operatorname{Im}(A)$ est $\mathbb{K}^3$ tout entier, i.e. l'application linéaire $A : \mathbb{K}^6 \to \mathbb{K}^3$ est surjective. Son noyau est de dimension 3 et est donné par les équations :

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 + x_5 + x_6 = 0 \\ \boxed{x_3} + x_4 + x_5 + 2x_6 = 0 \\ \boxed{x_5} - x_6 = 0 \end{cases}$$

où les variables libres sont x_2, x_4, x_6. En leur donnant les valeurs $(1,0,0)$, resp. $(0,1,0)$ resp. $(0,0,1)$, on obtient la base ci-dessous de $\operatorname{Ker}(A)$, où les variables libres sont indiquées en gras :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ -1 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ \mathbf{0} \\ -3 \\ \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Dans tout ce qui précède, on a noté r le nombre de lignes possédant un pivot (les r premières, par construction). Que ce nombre r soit le rang du système va résulter du lemme suivant.

Lemme 3.23. — *Soit $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V et soit $E = \operatorname{Vect}(v_1, \cdots, v_p)$ le sev de V engendré par $\mathscr{F}$. Soit $\mathscr{F}'$ la famille déduite de $\mathscr{F}$ en appliquant l'une des trois opérations élémentaires de 3.4.1, i.e. : (a) multiplier un v_i par un scalaire $\alpha \neq 0$, (b) remplacer v_i par $v_i' = v_i + \alpha v_j$ avec $j \neq i$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, (c) échanger v_i et v_j. Alors E est inchangé si l'on remplace $\mathscr{F}$ par $\mathscr{F}'$, i.e. on a $E = \operatorname{Vect}(\mathscr{F}')$.*

Démonstration. — C'est clair pour une opération (a) ou (c), donc supposons être dans le cas (b). Comme $v_i' = v_i + \alpha v_j \in E$, on a $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}') \subset E$. Réciproquement, comme $v_j' = v_j$, alors $v_i = v_i' - \alpha v_j = v_i' - \alpha v_j'$ appartient à $\mathscr{F}'$ donc $E \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{F}')$. On a donc l'égalité $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}')$. □

(Q) ***Corollaire 3.24.*** — *Revenons au système $\mathscr{S} : AX = b$.*

(i) *Le nombre de lignes de pivot est égal au rang de $\mathscr{S}$.*

(ii) *Le rang de $\mathscr{S}$ (égal au nombre maximum de* lignes *de A linéairement indépendantes) est égal au rang de A (égal au nombre maximum de* colonnes *de A linéairement indépendantes).*

Démonstration. — Par définition, $\mathrm{rang}(\mathscr{S}) = \mathrm{rang}(\mathscr{S}_0)$ est le nombre maximum de lignes de A qui sont linéairement indépendantes, considérées comme vecteurs de l'espace vectoriel des matrices lignes $V = M_{1,n}(\mathbb{K})$. Ce nombre est donc la dimension du sev E de V engendré par les lignes de A. D'après le lemme précédent, ce sev E ne change pas lorsqu'on effectue les opérations sur les lignes, donc E est aussi le sev engendré par les lignes de la matrice échelonnée A_r obtenue à la fin. Dans cette matrice, les r premières lignes sont linéairement indépendantes (car chacune commence plus à droite que la précédente, donc si on a $\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_r L_r = 0$, on obtient successivement $\alpha_1 = 0$, puis $\alpha_2 = 0$, etc.) et les autres sont nulles, donc $\dim(E) = r$. Ceci prouve (i).

D'autre part, on a vu (3.18 et 3.21) que $\dim \mathrm{Ker}(A) = n - r$. D'après le théorème du rang, on a donc $r = \mathrm{rang}(A)$. □

(Q) ***Définition et proposition 3.25.*** — *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

(i) *Sa* transposée ${}^tA \in M_{n,p}$ *est la matrice* ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$ *dont les colonnes sont les lignes de A (et vice-versa). Donc, pour tout $i = 1, \ldots, p$ et $j = 1, \ldots, n$, on a :* $\boxed{({}^tA)_{ji} = A_{ij}.}$

(ii) *On a* ${}^t({}^tA) = A$.

(iii) *On a :* $\mathrm{rang}({}^tA) = \mathrm{rang}(A)$.

Démonstration. — (ii) et immédiat, et (iii) est une reformulation du point (ii) de 3.24. □

Exercice 3.26. — Soient $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,q}(\mathbb{K})$. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. (Calculer le terme d'indice (i,j) de chaque matrice.)

Exercice 3.27. — Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. On suppose que $A\,{}^tA = 0$. Montrer que $A = 0$.

On peut maintenant rassembler tous les résultats obtenus dans le théorème suivant.

(Q) ***Théorème 3.28.*** — *Soient $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ *des vecteurs d'inconnues. On considère le système $\mathscr{S} : AX = Y$ et sa matrice augmentée $(A \mid Y)$.*

(i) *Par des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée, on se ramène à un couple $(A_r \mid Z)$ où $r = \mathrm{rang}(\mathscr{S}) = \mathrm{rang}(A)$, chaque z_i est une certaine combinaison linéaire $f_i(Y) = \alpha_{i1}y_1 + \cdots + \alpha_{ip}y_p$, et A_r est* échelonnée *de rang r : pour $i = 1, \ldots, r$ la ligne L_i commence par un pivot $\boxed{1}$ à la place k_i, avec $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$, et les autres lignes sont nulles.*

(ii) *Les variables correspondant aux indices j dont la colonne C_j ne contient pas (resp. contient) un pivot s'appellent les* variables libres *(resp.* liées*).*

(iii) *Le sev $\mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{K}^p$ est défini par les équations $f_i(y) = 0$ pour $i = r+1, \ldots, n$.*

(iv) *Le noyau $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathbb{K}^n$ est donné par le système homogène $A_r X = 0$ et est de dimension $n - r$. Plus précisément, si X_j est l'unique élément de $\mathrm{Ker}(A)$ obtenu en annulant toutes les variables libres sauf la j-ème d'entre elles qui vaut 1, alors $(X_1, \ldots, X_{n-r})$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$.*

(v) *Soit* $b \in \mathbb{K}^p$. *Si* $b \notin \mathrm{Im}(A)$ *le système n'a pas de solution, et si* $b \in \mathrm{Im}(A)$ *l'ensemble des solutions est le sous-espace affine* $I_0 + \mathrm{Ker}(A)$ *de* $\mathbb{K}^n$, *où* $I_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ *est une solution fixée arbitrairement.*

Corollaire 3.29. — *Soit E un sev de $\mathbb{K}^n$ défini par des équations linéaires $\phi_1, \dots, \phi_p$, i.e.*

$$E = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid 0 = \phi_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n, \quad \forall i = 1, \dots, p\}.$$

Alors $\dim(E) = n - r$, *où r est le nombre maximum d'équations indépendantes parmi $\phi_1, \dots, \phi_p$.*

En effet, E n'est autre que l'espace des solutions du système défini par les équations $\phi_1, \dots, \phi_p$.

Remarque 3.30. — Revenant à la prop. 3.17 et au point (iii) du th. 3.28, on voit que les équations linéaires $f_{r+1}(b) = 0, \dots, f_p(b) = 0$ sont linéairement indépendantes, puisque le sev $\mathrm{Im}(A)$ de $\mathbb{K}^p$ qu'elles définissent est de dimension $r = p - (p - r)$.

Remarque 3.31. — De l'avis de l'auteur de ces lignes, la 3-ème opération (échange de lignes) n'est utile que pour des raisons esthétiques et théoriques (en particulier pour décrire commodément l'algorithme) mais dans la pratique pour résoudre à la main des systèmes avec, disons, $p, n \leq 6$, on peut s'en passer en se contentant de matrices qui sont échelonnées « *à permutation des lignes près* ». Illustrons ceci sur l'exemple suivant.

$$(\mathscr{S}) \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = b_1 & (L_1) \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = b_2 & (L_2) \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = b_3 & (L_3) \end{cases}$$

La matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & b_1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & b_2 \\ 1 & 2 & 2 & b_3 \end{array}\right)$ et l'on prend comme pivot le $\boxed{1}$ indiqué, *sans faire passer la ligne* 2 *à la 1ère place*. En faisant $L_1 \to L_1 - 2L_2$ et $L_3 \to L_3 - L_2$ on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & b_1 - 2b_2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & b_3 - b_2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to -L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{1} & 2b_2 - b_1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & b_3 - b_2 \end{array}\right)$$

et la matrice ainsi obtenue est « échelonnée à permutation des lignes près », ce qui est suffisant pour résoudre le système : pour tout b il y a une solution unique, donnée par $x_3 = 2b_2 - b_1$, puis $x_2 = b_3 - b_2 - x_3 = b_3 - 3b_2 + b_1$, puis $x_1 = b_2 - x_3 - x_2 = 2b_2 - b_3$.

3.5. Déterminants

3.5.1. Déterminants 2×2. — Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, son *déterminant* est $\delta = \mathrm{dét}(A) = ad - bc \in \mathbb{K}$. Si $\mathrm{dét}(A) \neq 0$, ceci est une information importante. Par exemple, considérons le système linéaire

$$(\mathscr{S}) \qquad \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 & (L_1) \\ cx_1 + dx_2 = y_2 & (L_2) \end{cases}$$

En multipliant (L_1) par d et en lui soustrayant b fois (L_2), on obtient $(ad - bc)x_1 = dy_1 - by_2$ et comme on a supposé $\delta \neq 0$ ceci donne $x_1 = \frac{1}{\delta}(dy_1 - by_2)$. En multipliant (L_2) par a et en lui soustrayant c fois (L_1), on obtient de même $x_2 = \frac{1}{\delta}(-cy_1 + ay_2)$. Ceci montre que pour tout y, il existe une unique solution x donnée par les formules précédentes. Une autre façon de présenter ce calcul est d'introduire la matrice $A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et de faire le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \delta I_2.$$

Donc $Y = AX = Y$ entraîne que $A'Y = A'AX = \delta I_2 X = \delta X$, et comme $\delta \neq 0$ ceci donne $X = \delta^{-1}A'Y$.

3.5.2. Préliminaire à la définition des déterminants $n \times n$. — Dans la suite de cette section, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ on va définir son déterminant dét(A) qui est un élément de $\mathbb{K}$. Il existe une formule explicite exprimant dét(A) en fonction des coefficients a_{ij} de A mais, en dehors du cas très simple où $n = 2$, il faudrait introduire d'autres notions mathématiques (le groupe S_n des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et la signature d'une permutation) juste pour pouvoir écrire cette formule, et il faudrait ensuite démontrer que l'application dét : $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifie un certain nombre de propriétés, qui sont celles que l'on utilise en pratique pour calculer dét(A).

En fait, on peut renverser l'ordre des choses, et lister d'abord les propriétés que doit vérifier le déterminant, puis montrer, par récurrence sur n, qu'il existe effectivement une *unique* application dét$_n$: $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant ces propriétés. La démonstration est assez longue, et il n'est pas nécessaire de la retenir. Par contre, il est essentiel de connaître les propriétés du déterminant qui vont être énoncées, et qu'on utilise sans cesse, aussi bien pour le calcul effectif que pour des raisons théoriques.

De plus, pour le calcul des valeurs propres d'une matrice A carrée à coefficients dans notre corps favori, disons $\mathbb{C}$, on aura besoin de calculer le *polynôme caractéristique* de A, i.e. le déterminant de la matrice $A - XI_n$, qui est à coefficients dans l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X]$. Par exemple, pour $n = 3$, on aura à calculer le déterminant de

$$A - XI_3 = \begin{pmatrix} a_{11} - X & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - X & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - X \end{pmatrix} \quad \text{où } a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ et } X \text{ est une indéterminée.}$$

Pour cette raison, il est utile de pouvoir calculer le déterminant d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ désigne un anneau commutatif arbitraire — qui en pratique sera notre corps favori $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou l'anneau $k[X]$ des polynômes sur k, ou encore l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers.

3.5.3. Déterminants $n \times n$. — Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$, on note $M_{p,q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Même si $\mathbb{K}$ n'est pas un corps, $M_{p,q}(\mathbb{K})$ est un groupe abélien (pour l'addition des matrices), et il est muni de la loi externe $\mathbb{K} \times M_{p,q}(\mathbb{K}) \to M_{p,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$\lambda \cdot (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$$

qui vérifie les mêmes propriétés 1.4 (i), (ii) que celles d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et ceci sera suffisant pour les calculs de déterminants que nous voulons faire.

En particulier, on note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{K})$ des colonnes à n lignes $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ et, chaque fois que cela sera utile, on considérera une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ comme la juxtaposition de ses colonnes $C_1, \dots, C_n$, i.e. on écrira $A = (C_1, \dots, C_n)$.

Définition 3.32. — On dit qu'une application $\phi : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est linéaire « en chaque colonne » si elle vérifie les propriétés suivantes : étant donné $A = (C_1, \dots, C_n) \in M_n(\mathbb{K})$, une colonne $V \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, si on fixe un indice de colonne $j \in \{1, \dots, n\}$ et qu'on remplace la colonne C_j par αC_j (resp. par $C_j + V$) en laissant les autres colonnes inchangées, on a les égalités :

a) $\phi(C_1, \dots, \alpha C_j, \dots, C_n) = \alpha\phi(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n)$,
b) $\phi(C_1, \dots, C_j + V, \dots, C_n) = \phi(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) + \phi(C_1, \dots, V, \dots, C_n)$,

qui peuvent aussi se récrire en une seule :

c) $\phi(C_1, \dots, \alpha C_j + V, \dots, C_n) = \alpha\phi(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) + \phi(C_1, \dots, V, \dots, C_n)$.

Remarquons que a) entraîne que : $\boxed{\phi(\alpha A) = \phi(\alpha C_1, \dots, \alpha C_n) = \alpha^n \phi(C_1, \dots, C_n) = \alpha^n \phi(A).}$ D'autre part, si $V' \in \mathbb{K}^n$ et si on remplace deux colonnes C_j et C_k par $C_j + V$ et $C_k + V'$ respectivement, on obtient les égalités suivantes, où les égalités horizontales (resp. verticales) concernent la colonne j (resp. k) et l'on a omis les autres colonnes :

$$\begin{tikzcd}
\phi(C_j+V, C_k+V') \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \phi(C_j, C_k+V') + \phi(V, C_k+V') \arrow[d, equal] \\
\phi(C_j+V, C_k) + \phi(C_j+V, V') \arrow[r, equal] & \phi(C_j, C_k) + \phi(V, C_k) + \phi(C_j, V') + \phi(V, V')
\end{tikzcd}$$

Théorème 3.33. — *Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif et soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

(a) *Il* existe *une fonction* dét : $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \text{dét}(A)$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) *C'est une fonction linéaire de chaque colonne de A.*

(2) *Si deux colonnes de A sont égales, alors* $\text{dét}(A) = 0$.

(3) $\text{dét}(I_n) = 1$.

(b) *Cette fonction est* unique*. De plus, on a la propriété d'unicité plus forte suivante : pour toute fonction $D : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les propriétés* (1) *et* (2)*, on a* $\boxed{D = D(I_n) \cdot \text{dét}}$ *c'est-à-dire $D(A) = D(I_n)\,\text{dét}(A)$ pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

Commençons par une conséquence importante de la propriété d'unicité.

(Q) ***Proposition 3.34***. — *Pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a* $\boxed{\text{dét}(AB) = \text{dét}(A)\,\text{dét}(B).}$

Démonstration. — Fixons $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour toute matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$, considérée comme la juxtaposition de ses colonnes $C_1, \dots, C_n$, il résulte de la définition du produit matriciel que les colonnes de la matrice AB sont $AC_1, \dots, AC_n$ (cf. 3.3).

On en déduit que l'application $D : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $B \mapsto D(B) = \text{dét}(AB)$ vérifie les propriétés (1) et (2). Pour (1), c'est clair : si B a deux colonnes C_i et C_j égales, alors les colonnes AC_i et AC_j de AB sont égales.

Vérifions (2). Soient $V \in \mathbb{K}^n$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Fixons un indice de colonne $j \in \{1, \dots, n\}$ et remplaçons C_j par $\alpha C_j + V$, en laissant inchangées les autres colonnes. On a $\boxed{A(\alpha C_j + V) = \alpha AC_j + AV}$ car le produit matriciel est linéaire en chaque variable : on l'a démontré dans la Prop. 3.4 (i) lorsque $\mathbb{K}$ est un corps, mais en revenant à la démonstration on voit qu'elle est valable pour tout anneau commutatif $\mathbb{K}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
D(C_1, \dots, \alpha C_j + V, \dots, C_n) &= \text{dét}(AC_1, \dots, \alpha AC_j + AV, \dots, AC_n) \\
&= \alpha\,\text{dét}(AC_1, \dots, AC_j, \dots, AC_n) + \text{dét}(AC_1, \dots, AV, \dots, AC_n) \\
&= \alpha D(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) + D(C_1, \dots, V, \dots, C_n)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que D est bien une fonction linéaire de chaque colonne. D'après la propriété d'unicité forte du théorème, on a donc $D = D(I_n)\,\text{dét}$. Or $D(I_n) = \text{dét}(AI_n) = \text{dét}(A)$ donc on a $D(B) = \text{dét}(A)\,\text{dét}(B)$ pour tout $B \in M_n(\mathbb{K})$. $\square$

Remarque 3.35. — Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{K})$. Pour apprécier la démonstration précédente, le lecteur pourra essayer de démontrer par un calcul direct que $\text{dét}(AB) = \text{dét}(A)\,\text{dét}(B)$, en utilisant la définition du déterminant donnée par : $\text{dét}(A) = ad - bc$.

Avant de démontrer le théorème 3.33, donnons deux conséquences des conditions (1) et (2) :

(Q) ***Proposition 3.36***. — *Soit $D : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto D(A)$ une fonction vérifiant les conditions* (1) *et* (2)*, i.e. D est linéaire en chaque colonne $A_1, \dots, A_n$ de A et $D(A) = 0$ si A a deux colonnes égales. Alors D vérifie les propriétés suivantes :*

$(*)$ $\boxed{\textit{D ne change pas si l'on ajoute à une colonne un multiple d'une autre colonne}}$ *c.-à-d. si A' désigne la matrice obtenue en remplaçant une colonne A_i par $A_i + \alpha A_j$, avec $j \neq i$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $D(A') = D(A)$.*

$(**)$ $\boxed{\textit{D change de signe si l'on échange deux colonnes}}$ *c.-à-d. on a :*

$$D(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n) = -D(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n).$$

Démonstration. — En effet, d'après (1) on a $D(A') = D(A) + \alpha D(\dots, A_j, \dots, A_j \dots)$, où dans le dernier terme la colonne A_j apparaît deux fois, aux places i et j. D'après (2), ce terme est nul, d'où $D(A') = D(A)$. Ceci prouve $(*)$.

Pour prouver $(**)$ on effectue le calcul suivant. On place $A_i + A_j$ dans les colonnes i et j, alors la condition (2) entraîne que :

$$0 = D(\dots, A_i + A_j, \dots A_i + A_j, \dots)$$

puisque deux colonnes sont égales. D'autre part, la condition (1) utilisée successivement pour les colonnes i et j donne que le terme de droite est la somme des quatre termes ci-dessous :

$$D(\dots, A_i, \dots, A_i, \dots) + D(\dots, A_j, \dots, A_j, \dots) + D(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) + D(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots)$$

et d'après (2) à nouveau, les deux premiers de ces termes sont nuls (deux colonnes égales). On obtient donc que

$$0 = D(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) + D(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots)$$

ce qui prouve $(**)$. □

Démonstration du théorème 3.33. — On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, alors $I_1 = (1)$, on a $M_1(\mathbb{K}) = \{(a) = aI_1 \mid a \in \mathbb{K}\}$, la condition (2) est vide car il n'y a qu'une seule colonne, l'application $\text{dét}_1 : (a) \mapsto a$ vérifie (1) et (3) et toute application linéaire $D : M_1(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est de la forme $(a) \mapsto \lambda a$, où $\lambda = D(I_1)$, donc $D = D(I_1)\,\text{dét}_1$. Donc le théorème est vrai pour $n = 1$.

Soit donc $n \geq 2$ et supposons avoir établi qu'il existe une application $\text{dét}_{n-1} : M_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les conditions (1), (2), (3), et que pour toute application $\psi : M_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les conditions (1) et (2), on a $\psi = \psi(I_{n-1}) \cdot \text{dét}_{n-1}$ (ceci implique, en particulier, que dét_{n-1} est uniquement déterminé). Montrons alors la proposition suivante.

(Q) ***Proposition 3.37* (Développement suivant une colonne).** — *Soit* $D : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *une fonction vérifiant les propriétés* (1) *et* (2). *Alors, pour tout indice de colonne* $j \in \{1, \dots, n\}$ *on a l'égalité suivante :*

$$(\star^j) \qquad D(A) = D(I_n) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\ \text{dét}_{n-1}(A - C_j - L_i),$$

où $A - C_j - L_i$ *désigne l'élément de* $M_{n-1}(\mathbb{K})$ *obtenu à partir de* A *en supprimant la colonne* C_j *et la ligne* L_i. *Cette égalité s'appelle :* « développement de D suivant la j-ème colonne ».

Démonstration. — Considérons les matrices colonnes suivantes :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors la colonne A_j de A s'écrit $A_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$ donc, d'après (1), on a :

$$(\dagger) \qquad D(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, D(A'(i,j)),$$

où l'on désigne par $A'(i,j)$ la matrice déduite de A en remplaçant A_j par la colonne e_i. Il faut donc montrer que : $\boxed{D(A'(i,j)) = (-1)^{i+j} D(I_n)\,\text{dét}_{n-1}(A - C_j - L_i).}$ Plutôt que de poursuivre la démonstration pour n et j arbitraires, faisons-la pour $n = 5$ et $j = 4$, ce qui suffit largement pour comprendre la démonstration.

Pour $n = 5$, $j = 4$ et, disons, $i = 2$, on a :

$$A'(2,4) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} \end{pmatrix}$$

et il faut montrer que $D(A'(2,4))$ est égal à $(-1)^{2+4}$ fois le déterminant de la matrice $A - C_4 - L_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{pmatrix}$. Notons $C_1, \dots, C_5$ les colonnes de $A'(2,4)$. Alors $C_k = A_k$ pour $k \neq 4$ tandis que C_4 est la colonne e_2. D'abord, d'après la Prop. 3.36, D ne change pas si dans la matrice $A'(2,4)$ on remplace chaque colonne C_k avec $k \neq 4$ par la colonne $C_k - a_{2k}C_4$. Ceci a pour effet de remplacer par 0 chaque coefficient a_{2k} de la ligne 2 avec $k \neq 4$. On obtient donc :

$$D\big(A'(2,4)\big) = D\big(A''(2,4)\big), \quad \text{où} \quad A''(2,4) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Soit $\psi : M_4(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ l'application qui à toute matrice $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$ associe $D(\widetilde{B})$, où $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 0 & b_{44} \end{pmatrix}$. On a donc $D(A''(2,4)) = \psi(A - C_4 - L_2)$. Montrons que ψ vérifie les propriétés (1) et (2). C'est clair pour (1) : si B a deux colonnes égales, il en est de même de $\widetilde{B}$ et donc $\psi(B) = D(\widetilde{B}) = 0$.

Prouvons (2). Si l'on fixe $\alpha \in \mathbb{K}$ et $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$ et si l'on remplace la colonne B_k de B par $\alpha B_k + V$, alors la colonne correspondante $\widetilde{B}_\ell$ de $\widetilde{B}$ (où $\ell = k$ si $k < 4$ et $\ell = k + 1$ si $k \geq 4$) est remplacée par α fois la colonne initiale $\widetilde{B}_\ell$ plus la colonne $V' = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^5$. Il en résulte que :

$$\psi(\dots, \alpha B_k + V, \dots) = D(\dots, \alpha\widetilde{B}_\ell + V', \dots) = \alpha D(\widetilde{B}) + D(\dots, V', \dots) = \alpha\,\psi(B) + \psi(E)$$

où E désigne l'élément de $M_4(\mathbb{K})$ déduit de B en remplaçant B_k par V. Ceci prouve que ψ vérifie la propriété (2). D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $\psi(B) = \psi(I_4)\,\mathrm{d\acute{e}t}_4(B) = D(\widetilde{I_4})\,\mathrm{d\acute{e}t}_4(B)$ pour tout $B \in M_4(\mathbb{K})$. Or $\widetilde{I_4}$ est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où les coefficients 1 sont sur la diagonale pour les lignes L_k avec $k < 2$ ou $k > 4$, mais ne sont pas à la « bonne place » sinon. Pour mettre tout les 1 à la « bonne place » (i.e. sur la diagonale), on voit qu'il suffit de faire descendre la colonne C_4 contenant le $\boxed{1}$ à la place $i = 2$, en décalant de un les colonnes 2 et 3. Ceci revient à faire $4-2$ échanges de colonnes, en faisant descendre C_4 d'un cran à chaque fois, et après ces échanges on obtient la matrice I_5. On a donc

$$D(\widetilde{I_4}) = (-1)^{4-2} D(I_5) = (-1)^{2+4} D(I_5)$$

la 2ème égalité découlant de $(-1)^{i+j} = (-1)^{j-i}(-1)^{2i} = (-1)^{j-i}$. On a donc

$$D(A'(2,4)) = D(A''(2,4)) = \psi(A - C_4 - L_2) = (-1)^{2+4} D(I_5) \operatorname{d\acute{e}t}(A - C_4 - L_2)$$

et l'on a ainsi montré que $\boxed{D(A'(i,j)) = (-1)^{i+j} D(I_n) \operatorname{d\acute{e}t}(A - C_j - L_i).}$ Ceci achève la démonstration de la proposition 3.37. □

Fin de la démonstration de 3.33. Construisons maintenant une fonction $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant (1), (2) et (3). Fixons un indice de ligne i arbitraire, et pour $j = 1, \dots, n$ notons

$$\Delta_{ij}(A) = \operatorname{d\acute{e}t}_{n-1}(A - L_i - C_j),$$

où $A - L_i - C_j$ désigne l'élément de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenu à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Considérons la fonction $D_i : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par

$$(\star_i) \qquad D_i(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij}\, \Delta_{ij}(A).$$

Lemme 3.38. — *D_i vérifie les propriétés* (1), (2) *et* (3).

Démonstration. — (1) Fixons $\alpha \in \mathbb{K}$, $V \in \mathbb{K}^n$, un indice de colonne ℓ et notons A' (resp. A'') la matrice obtenue en remplaçant la colonne A_ℓ de A par $\alpha A_\ell + V$ (resp. par V). Calculons $D_i(A')$. Si $j \neq \ell$ on a $a'_{ij} = a_{ij} = a''_{ij}$ et $\Delta_{ij}(A') = \alpha\Delta_{ij}(A) + \Delta_{ij}(A'')$, tandis que si $j = \ell$ on a $\Delta_{i\ell}(A') = \Delta_{i\ell}(A) = \Delta_{i\ell}(A'')$ et $a'_{i\ell} = \alpha a_{i\ell} + a''_{i\ell}$. Dans les deux cas, on a

$$a_{ij}\Delta_{ij}(A') = \alpha a_{ij}\Delta_{ij}(A) + a''_{ij}\Delta_{ij}(A'')$$

et en sommant ces égalités pour $j = 1, \dots, n$ on obtient que $D_i(A') = \alpha D_i(A) + D_i(A'')$. Ceci prouve que D_i vérifie la propriété (1).

(2) Supposons qu'il existe $p < q$ tels que les colonnes C_p et C_q de A soient égales. Alors, pour $j \neq p, q$ la matrice $A - L_i - C_j$ a encore deux colonnes égales d'où $\Delta_{ij}(A) = 0$ et donc dans la somme $(\star_i)$ ne restent que les deux termes pour $j = p$ ou q. D'autre part, les matrices $A - L_i - C_p$ et $A - L_i - C_q$ se déduisent l'une de l'autre par $q - 1 - p$ échanges de colonnes, car la colonne $C = C_p = C_q$ est à la place p dans $A - L_i - C_q$ et à la place $q - 1$ dans $A - L_i - C_p$. Donc, d'après la Prop. 3.36, on a $\Delta_{ip}(A) = (-1)^{q-1-p}\Delta_{iq}(A)$. Posant $\alpha = a_{ip} = a_{iq}$, la somme $(\star_i)$ donne alors :

$$D_i(A) = \alpha\, \Delta_{iq}(A) \left((-1)^{i+q} + (-1)^{i+p+q-1-p}\right) = (-1)^{i+q}\alpha\, \Delta_{iq}(A)\,(1-1) = 0,$$

donc D_i vérifie la propriété (2).

(3) Enfin, lorsque $A = I_n$, le terme a_{ij} est nul sauf si $j = i$, auquel cas $a_{ii} = 1$ et la matrice $I_n - L_i - C_i$ égale I_{n-1}. Donc la somme dans $(\star_i)$ se réduit au terme pour $j = i$, qui vaut $(-1)^{2i} \cdot 1 \cdot \operatorname{d\acute{e}t}_{n-1}(I_{n-1}) = 1$, donc D_i vérifie la propriété (3). □

On peut donc définir la fonction $\operatorname{d\acute{e}t}_n : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ en posant $\operatorname{d\acute{e}t}(A) = D_i(A)$; d'après la propriété d'unicité déjà établie, ceci ne dépend pas du choix de la ligne i, c.-à-d. les fonctions D_i sont toutes égales (ce qui n'était pas évident a priori). De plus, la proposition 3.37 montre que pour toute fonction $D : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les propriétés (1) et (2) on a $D = D(I_n) \operatorname{d\acute{e}t}_n$. Ceci achève la démonstration du théorème 3.33. □

(Q) ***Corollaire 3.39*** **(Développement suivant une ligne ou une colonne)**
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une unique application $\text{dét}_n : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *vérifiant les propriétés* (1), (2) *et* (3) *et celle-ci vérifie (si $n \geq 2$) les formules ci-dessous de développement par rapport à une colonne ou une ligne :*

$$(\star^j) \qquad \text{dét}_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\ \text{dét}_{n-1}(A - C_j - L_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, \Delta_{ij}(A).$$

$$(\star_i) \qquad \text{dét}_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij}\ \text{dét}_{n-1}(A - L_i - C_j) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\, \Delta_{ij}(A).$$

Remarque 3.40. — On peut visualiser les signes $(-1)^{i+j}$ qui apparaissent dans les formules de développement par le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

i.e. les signes $+$ et $-$ alternent sur chaque ligne et chaque colonne, et c'est toujours $+$ sur la diagonale.

Notation 3.41. — Pour une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, son déterminant $\text{dét}(A)$ est aussi noté $|a_{ij}|$, i.e. on remplace les parenthèses ( ) par des barres | |. Ainsi : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Exemple 3.42. — Pour $n = 3$, le développement par rapport à la 1ère colonne donne :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.\end{aligned}$$

D'autre part, il résulte de la construction de $\text{dét}(A)$ que c'est la somme de tous les produits possibles obtenus en prenant un coefficient a_{ij} dans chaque ligne et chaque colonne, c.-à-d. de tous les produits de la forme $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ où les indices $i_1, \dots, i_n$ sont deux à deux distincts, chaque produit étant précédé d'un signe $+$ ou $-$. Pour $n = 3$, on peut retenir les signes de la façon suivante : les trois produits qui contiennent exactement un coefficient diagonal a_{kk} sont précédés du signe $-$, et les trois autres produits du signe $+$, i.e. on a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(Q) ***Proposition 3.43.*** — *Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a* $\boxed{\text{dét}({}^tA) = \text{dét}(A).}$

Démonstration. — On procède par récurrence sur n. Il n'y a rien à montrer si $n = 1$, donc on peut supposer $n \geq 2$ et le résultat établi pour $n - 1$. Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$. D'après $(\star_1)$ appliqué à ${}^tA$, on a

$$\text{dét}({}^tA) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1}\, ({}^tA)_{1j}\, \Delta_{1j}({}^tA)\,.$$

Or, $({}^tA)_{1j} = a_{j1}$ et

$$\begin{aligned}\Delta_{1j}({}^tA) = \text{dét}_{n-1}\Big({}^tA - L_1({}^tA) - C_j({}^tA)\Big) &= \text{dét}_{n-1}\Big({}^t\big(A - C_1(A) - L_j(A)\big)\Big) \\ &= \text{dét}_{n-1}\Big(A - C_1(A) - L_j(A)\Big) = \Delta_{j1}(A)\end{aligned}$$

(l'avant-dernière égalité d'après l'hypothèse de récurrence). On obtient donc

$$\text{dét}({}^tA) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{j1}\,\Delta_{j1}(A) = \text{dét}(A),$$

la seconde égalité étant ($\star^1$). Ceci prouve la proposition. □

(Q) ***Définition 3.44.*** — On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est *inversible* (sous-entendu : *dans* $M_n(\mathbb{K})$) s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n = BA$. Dans ce cas, B est unique (car si $AC = I_n = CA$ alors $(BA)C = I_nC = C$ égale $B(AC) = BI_n = B$) et est notée $B = A^{-1}$. Les égalités $BA = I_n = AB$ montrent alors que $A = B^{-1}$.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ qui sont inversibles. (C'est un *groupe* pour la multiplication des matrices, car si A, B sont inversibles, le produit AB a pour inverse $A^{-1}B^{-1}$.)

(Q) ***Définition et proposition 3.45*** **(Matrice des cofacteurs)**. — *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$.

(i) *Chaque* $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A) \in \mathbb{K}$ *est appelé le* cofacteur *de* A *d'indice* (i,j). *On appelle* matrice des cofacteurs *de* A *la matrice* $\widetilde{A}$ *dont le coefficient d'indice* (i,j) *est* $\widetilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$.

(ii) *On a :* $\boxed{A \cdot {}^t\widetilde{A} = \text{dét}(A)I_n = {}^t\widetilde{A} \cdot A.}$

(iii) *Par conséquent* A *est inversible si et seulement si* dét(A) *est un élément inversible de* $\mathbb{K}$ *; dans ce cas, on a* $\boxed{\text{dét}(A^{-1}) = \text{dét}(A)^{-1}.}$

(iv) *S'il existe* $Q \in M_n(\mathbb{K})$ *telle que* $QA = I_n$ *(resp.* $AQ = I_n$*) alors* A *est inversible et* $A^{-1} = Q$.

Démonstration. — Pour tout $i, k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$(A\,{}^t\widetilde{A})_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\,({}^t\widetilde{A})_{ji} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+i}a_{kj}\,\Delta_{ij}(A)$$

et l'on reconnaît là le développement suivant la ligne i du déterminant de la matrice $B(i,k)$ déduite de A en remplaçant la ligne d'indice i par celle d'indice k. Donc $(A\,{}^t\widetilde{A})_{ki} = 0$ si $k \neq i$ (car $B(i,k)$ a alors deux lignes égales), et $(A\,{}^t\widetilde{A})_{ii} = \text{dét}(A)$ si $k = i$. Ceci montre que $A\,{}^t\widetilde{A} = \text{dét}(A) \cdot I_n$.

De même, pour tout $j, k \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$({}^t\widetilde{A}\,A)_{jk} = \sum_{i=1}^{n}({}^t\widetilde{A})_{ji}\,a_{ik} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ik}\,\Delta_{ij}(A)$$

et l'on reconnaît là le développement suivant la colonne j du déterminant de la matrice $B'(j,k)$ déduite de A en remplaçant la colonne d'indice j par celle d'indice k. Donc, à nouveau, $({}^t\widetilde{A}\,A)_{jk} = 0$ si $k \neq j$, et $= \text{dét}(A)$ si $k = j$, d'où ${}^t\widetilde{A}\,A = \text{dét}(A) \cdot I_n$. Ceci prouve le point (ii).

Il en résulte que si $\delta = \text{dét}(A)$ est inversible dans $\mathbb{K}$, c.-à-d. s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha\delta = 1$, alors la matrice $B = \alpha\,{}^t\widetilde{A}$ vérifie $AB = I_n = BA$, donc est l'inverse de A. Réciproquement, si A est inversible, l'égalité $AA^{-1} = I_n$ et la « multiplicativité du déterminant » (Prop. 3.34) entraînent :

$$1 = \text{dét}(I_n) = \text{dét}(AA^{-1}) = \text{dét}(A)\,\text{dét}(A^{-1}),$$

donc dét(A) est inversible dans $\mathbb{K}$, d'inverse $\text{dét}(A^{-1}) = \text{dét}(A)^{-1}$.

Enfin, supposons qu'il existe $Q \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $QA = I_n$. Alors $\text{dét}(Q)\,\text{dét}(A) = 1$ donc dét(A) est un élément inversible de $\mathbb{K}$ donc A^{-1} existe. Multipliant l'égalité $QA = I_n$ par A^{-1} à droite, on obtient $Q = A^{-1}$. La démonstration est analogue si l'on part de l'égalité $AQ = I_n$. Cette démonstration montre que pour des matrices $n \times n$, l'une quelconque des égalités $QA = I_n$ ou $AQ = I_n$ entraîne la seconde. (Lorsque $\mathbb{K}$ est un corps, on verra dans un chapitre ultérieur une autre démonstration de ce résultat.) □

Corollaire 3.46. — *Soient* $\mathbb{K}$ *un anneau commutatif,* $A, P \in M_n(\mathbb{K})$ *avec* P *inversible, alors*

$$\boxed{\text{dét}(P^{-1}AP) = \text{dét}(P^{-1})\,\text{dét}(A)\,\text{dét}(P) = \text{dét}(A).}$$

Exercice 3.47. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}) \subset M_3(\mathbb{R})$. Est-elle inversible dans $M_3(\mathbb{Z})$? dans $M_3(\mathbb{R})$?

Définition 3.48. — Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *triangulaire supérieure* (resp. *triangulaire inférieure*) si tous les coefficients strictement en-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nuls. Par exemple, la matrice A de l'exercice précédent est triangulaire supérieure, tandis que la matrice $B \in M_3(\mathbb{R}[X])$ suivante est triangulaire inférieure : $B = \begin{pmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ 5 & 3-X & 0 \\ 7 & 2 & 1-X \end{pmatrix}$.

(Q) ***Proposition 3.49* (Déterminant de matrices triangulaires).** — *Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire de termes diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors* $\boxed{\operatorname{dét}(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.}$

Démonstration. — Supposons par exemple que A soit triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors en développant par rapport à la première colonne, on obtient que

$$\operatorname{dét}(A) = \lambda_1 \operatorname{dét} \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et le résultat en découle, en répétant l'opération ou en procédant par récurrence sur n. □

3.5.4. Cas d'un corps. — Revenons, pour la fin de cette section, au cas où l'anneau de base $\mathbb{K}$ est un corps.

***Définition 3.50* (Opérations sur les lignes ou sur les colonnes)**

Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. On a déjà introduit (au début de 3.4.1) les opérations élémentaires sur les lignes de A, que nous récrivons ci-dessous, en ajoutant la lettre ℓ pour « ligne » :

(ℓ 1) Multiplier une ligne L_i par un scalaire $\alpha \neq 0$.

(ℓ 2) Ajouter à une ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j, c.-à-d. remplacer L_i par $L_i + \alpha L_j$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $j \neq i$.

(ℓ 3) Échanger deux lignes L_i et L_j.

On peut aussi introduire les opérations analogues sur les colonnes de A :

(c 1) Multiplier une colonne C_i par un scalaire $\alpha \neq 0$.

(c 2) Ajouter à une colonne C_i un multiple d'une autre colonne C_j, c.-à-d. remplacer C_i par $C_i + \alpha C_j$, avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $j \neq i$.

(c 3) Échanger deux colonnes C_i et C_j.

(Q) ***Proposition 3.51.*** — *Soient $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

(i) *Le déterminant est* inchangé *si l'on effectue une opération de type* (c 2) *ou* (ℓ 2).

(ii) *Le déterminant* change de signe *si l'on effectue une opération de type* (c 3) *ou* (ℓ 3).

(iii) *Le déterminant est* multiplié par α *si l'on effectue une opération de type* (c 1) *ou* (ℓ 1).

Démonstration. — Pour les opérations sur les colonnes, (i) et (ii) ont été vus dans la Prop. 3.36, et (iii) découle directement de la linéarité par rapport à chaque colonne. Comme $\operatorname{dét}(A) = \operatorname{dét}({}^tA)$, il en va de même pour les opérations sur les lignes. □

(Q) ***Proposition 3.52.*** — *Soient $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :* $\boxed{\operatorname{dét}(A) \neq 0 \iff \operatorname{rang}(A) = n.}$

Démonstration. — Si $\operatorname{rang}(A) < n$, les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de A sont liées donc l'une d'elles, disons C_n pour simplifier, s'écrit comme combinaison linéaire des autres : $C_n = \alpha_1 C_1 + \cdots + \alpha_{n-1} C_{n-1}$. Alors on a :

$$\operatorname{dét}(A) = \operatorname{dét}(C_1, \dots, C_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \operatorname{dét}(C_1, \dots, C_j) = 0,$$

la dernière égalité résultant de ce que chaque matrice $(C_1, \dots, C_j)$ a deux colonnes égales.

Réciproquement, si $\operatorname{rang}(A) = n$ alors, en faisant sur les lignes uniquement des opérations de type $(\ell\,1)$ ou $(\ell\,3)$, qui ne changent pas le déterminant ou ne font que le multiplier par -1, on obtient que $\operatorname{dét}(A)$ est égal à ± 1 fois le déterminant d'une matrice « échelonnée » (sauf qu'on n'a pas exigé que les pivots soient égaux à 1) de rang n :

$$A_n = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

qui est donc triangulaire supérieure avec des termes diagonaux non nuls. On a donc $\operatorname{dét}(A_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$ et $\operatorname{dét}(A) = \pm \operatorname{dét}(A_n) \neq 0$. □

(Q) ***Remarque 3.53* (Très importante).** — Pour calculer pratiquement un déterminant, on ne procède pas véritablement en développant suivant les lignes ou les colonnes (ce qui serait trop fastidieux, et coûteux en temps de calcul), mais on essaie de faire des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, pour rendre la matrice triangulaire. Illustrons ceci par un exemple. Calculons, en faisant des opérations sur les colonnes, le déterminant suivant (où $n \in \mathbb{Z}$) :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 9 & 8 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 & n \end{vmatrix}$$

Remplaçant C_2, C_3 et C_4 par $C_2 - (3/2)C_1$, $C_3 - 2C_1$ et $C_4 - (5/2)C_1$ on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -9/2 & -5 & -19/2 \\ 10 & -4 & -8 & -12 \\ 14 & -6 & -12 & n-35 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -9/2 & -5 & -19/2 \\ -4 & -8 & -12 \\ -6 & -12 & n-35 \end{vmatrix}$$

où la 2ème égalité est obtenue en développant par rapport à la 1ère ligne.

Puis remplaçant chaque colonne par son opposé (ce qui introduit un signe $(-1)^3$), mettant 4 en facteur dans la 2ème ligne, puis échangeant L_1 et L_2 (ce qui introduit un signe -1), on obtient :

$$D = 2 \cdot 4 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9/2 & 5 & 19/2 \\ 6 & 12 & 35-n \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9/2 & 5 & 19/2 \\ 6 & 12 & 35-n \end{vmatrix}.$$

Puis remplaçant C_2 et C_3 par $C_2 - 2C_1$ et $C_2 - 3C_1$, respectivement, et développant ensuite par rapport à la 1ère ligne, on obtient :

$$D = 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9/2 & -4 & -4 \\ 6 & 0 & 17-n \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 17-n \end{vmatrix} = 32(n-17).$$

À titre d'exercice, le lecteur pourra calculer D en faisant des opérations sur les *lignes* plutôt que sur les colonnes.

Lemme 3.54. — *Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors :*

(i) *Faire sur A une opération de type $(\ell\,1)$, $(\ell\,2)$ ou $(\ell\,3)$ est la même chose que multiplier A à* gauche *par une certaine matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, c.-à-d. faire le produit QA.*

(ii) *De même, faire sur A une opération de type $(c\,1)$, $(c\,2)$ ou $(c\,3)$ est la même chose que multiplier A à* droite *par une certaine matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, c.-à-d. faire le produit AP.*

Démonstration. — Soit $E_{ij} \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1. On voit facilement que toutes les lignes du produit $E_{ij}A$ sont nulles sauf la i-ème, qui vaut $(a_{j1},\dots,a_{jn})$ = la j-ème ligne $L_j(A)$ de A. On en déduit ce qui suit :

(1) Si $Q = I_p + \alpha E_{ij}$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $j \neq i$, alors $QA = A + \alpha E_{ij}A$ a les mêmes lignes que A, sauf la i-ème qui est devenue $L_i(A) + \alpha L_j(A)$.

(2) Si Q est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1, sauf le i-ème qui vaut $\alpha \neq 0$, alors QA a les mêmes lignes que A, sauf la i-ème qui est devenue $\alpha L_i(A)$.

(3) Soit Q la matrice déduite de la matrice identité I_p en échangeant les lignes i et j, c.-à-d. la i-ème (resp. j-ème) ligne de Q a tous ses coefficients nuls, à l'exception d'un 1 dans la colonne j (resp. i). Alors QA a les mêmes lignes que A, sauf la i-ème qui est devenue $L_j(A)$, et la j-ème qui est devenue $L_i(A)$.

On voit ainsi que chaque opération $(\ell\,1)$, $(\ell\,2)$ ou $(\ell\,3)$ est obtenue par multiplication à gauche par une certaine matrice Q, qui ne dépend pas de A mais seulement de l'opération effectuée.

De plus, cette matrice Q est inversible : dans le cas (1) son inverse est $Q' = I_p - \alpha E_{ij}$ car $E_{ij}E_{ij} = 0$ puisque $i \neq j$ et donc $QQ' = I_p + \alpha E_{ij} - \alpha E_{ij} = I_p = Q'Q$. Dans le cas (2), l'inverse de Q est la matrice diagonale Q' obtenue en remplaçant α par α^{-1}. Enfin, dans le cas (3), si on multiplie Q à gauche par Q, on échange à nouveau les lignes d'indices i et j et l'on retombe sur la matrice identité I_p : ceci montre que $Q^2 = I_p$ donc Q est inversible et $Q^{-1} = Q$.

La démonstration est analogue dans le cas des opérations sur les colonnes. □

3.6. Algorithme pour déterminer si A^{-1} existe et la calculer

(Q) ***Proposition 3.55.*** — *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour déterminer si A est inversible et, si oui, calculer son inverse, on écrit côte à côte A et la matrice identité I_n, i.e. $(A \mid I_n)$, et l'on procède comme suit.*

(i) *On effectue simultanément sur les deux matrices une suite d'opérations sur les lignes jusqu'à arriver à un couple $(A' = Q_1A \mid Q_1)$, où A' est échelonnée et de même rang que A. On a alors deux cas.*

> (1) *Si* $\mathrm{rang}(A') < n$, *alors A n'est pas inversible. — Mais le couple $(A' \mid Q_1)$ permet de résoudre le système $AX = Y$ qui équivaut à $A'X = Q_1Y$, lequel est un système échelonné dont le second membre Q_1Y est le Z du Th.* 3.28.
>
> (2) *Si* $\mathrm{rang}(A') = n$ *alors A' est triangulaire supérieure avec des* 1 *sur la diagonale. On peut alors poursuivre les opérations sur les lignes pour annuler les coefficients au-dessus de la diagonale : on aboutit ainsi à un couple $(I_n = Q_2Q_1A \mid Q = Q_2Q_1)$, et l'égalité $QA = I_n$ entraîne que $Q = A^{-1}$.*

(ii) *On peut aussi faire des opérations sur les colonnes pour arriver à un couple $(\widetilde{A} = AP_1 \mid P_1)$ où $\widetilde{A}$ est triangulaire et de même rang que A. Si ce rang égale n, on peut poursuivre les opérations sur les colonnes pour aboutir à un couple $(I_n = AP_1P_2 \mid P = P_1P_2)$, et l'égalité $AP = I_n$ entraîne que $P = A^{-1}$.*

(iii) *Attention ! Il faut choisir de faire les opérations toutes sur les lignes,* ou bien *toutes sur les colonnes, mais ne pas mélanger les deux, sinon le résultat est faux en général !*

Démonstration. — (i) Par une suite d'opérations sur les lignes, ce qui revient à multiplier à gauche A et I_n par une certaine matrice Q_1, on sait qu'on arrive à un couple $(A' = Q_1A \mid Q_1)$, où A' est échelonnée et de même rang que A.

(1) Si $\mathrm{rang}(A') < n$, alors A n'est pas inversible. — De plus multiplier à gauche Y par Q_1 revient à faire sur la matrice colonne Y les mêmes opérations sur les lignes que pour A, c.-à-d. à

faire ces opérations sur les lignes de la matrice augmentée $(A \mid Y)$, ce qui montre que Q_1Y est bien le second membre Z du Th. 3.28.

(2) Si $\operatorname{rang}(A') = n$ alors A' est de la forme suivante, disons pour $n = 4$: $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

alors en faisant $L_i \to L_i - a_{i4}L_4$ pour $i = 1, 2, 3$ on arrive à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis en faisant $L_i \to L_i - a_{i3}L_3$ pour $i = 1, 2$ on arrive à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis en faisant $L_1 \to L_1 - a_{12}L_2$ on arrive à la matrice I_4. Ce raisonnement montre, pour n arbitraire, qu'après d'autres opérations sur les lignes on aboutit à un couple $(I_n = Q_2Q_1A \mid Q = Q_2Q_1)$. D'après le point (iv) de la Prop. 3.45, l'égalité $QA = I_n$ entraîne que $A^{-1} = Q$ et donc on a bien calculé A^{-1} qui est la matrice dans la case de droite à la fin du processus.

(ii) En utilisant le lemme 3.23, on voit que le rang de A est préservé quand on fait des opérations $(c\,1)$, $(c\,2)$ ou $(c\,3)$ sur les colonnes. Le reste de la démonstration de (ii) est tout-à-fait analogue à celle de (i).

(iii) Enfin, expliquons pourquoi il ne faut **pas** mélanger les opérations sur les lignes et les colonnes pour calculer A^{-1}. Les opérations faites sur les lignes (resp. colonnes) reviennent à multiplier A à gauche par une matrice Q (resp. à droite par une matrice P), et de même pour I_n. On s'arrête quand la matrice transformée QAP égale I_n ; alors dans l'autre case on a $QI_nP = QP$. Mais l'égalité $QAP = I_n$ donne $A = Q^{-1}P^{-1}$ d'où $A^{-1} = PQ$ qui en général est $\neq QP$. □

(Q) ***Exemple 3.56***. — Illustrons ceci avec l'exemple suivant :

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 5L_2/2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to \frac{-L_3}{13}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/13 & 5/13 & -1/13 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 5L_3]{L_1 \to L_1 - L_3/2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 15/26 & -5/26 & 1/26 \\ 0 & 1 & 0 & -3/13 & 1/13 & 5/13 \\ 0 & 0 & 1 & -2/13 & 5/13 & -1/13 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6/13 & -2/13 & 3/13 \\ 0 & 1 & 0 & -3/13 & 1/13 & 5/13 \\ 0 & 0 & 1 & -2/13 & 5/13 & -1/13 \end{array}\right).$$

(Q) ***Remarque 3.57***. — Au lieu de la suite d'opérations sur les lignes utilisée plus haut, on peut choisir n'importe quelle suite d'opérations sur les lignes de façon à obtenir des calculs les plus simples possibles. Ainsi, dans cet exemple, il apparaît plus avantageux de procéder comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_2 \to L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to -L_3/13}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/13 & 5/13 & -1/13 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 5L_3]{L_1 \to L_1 - 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6/13 & -2/13 & 3/13 \\ 0 & 1 & 0 & -3/13 & 1/13 & 5/13 \\ 0 & 0 & 1 & -2/13 & 5/13 & -1/13 \end{array}\right).$$