CHAPITRE 4

SUITES RÉELLES OU COMPLEXES, SUITES RÉCURRENTES RÉELLES

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $|z|$ sa valeur absolue complexe ; lorsque $z \in \mathbb{R}$ ceci coïncide avec la valeur absolue réelle.

4.1. Théorème de Bolzano-Weierstrass et conséquences

4.1.1. Théorème de Bolzano-Weierstrass. —

***Définition 4.1* (Suites extraites).** — Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Une *sous-suite* ou *suite extraite* de u est une suite obtenue en ne prenant les termes u_n que pour certains indices $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$. Donnons tout de suite des exemples.

(1) La suite $P_n = u_{2n}$ des termes d'indice pair, est une sous-suite de u. De même, la suite $I_n = u_{2n+1}$ des termes d'indice impair, est une sous-suite de u.

(2) De même, si l'on fixe un entier $p > 1$, la suite $v_n = u_{p^n}$, obtenue en ne prenant que les indices qui sont des puissances de p, est une sous-suite de u.

(3) Dans les exemples précédents, les indices « retenus » (i.e. les entiers pairs ou impairs, ou les puissances de p) sont donnés par une formule explicite, fixée à l'avance. Mais il arrive souvent qu'on construise une sous-suite « pas-à-pas » : étant donnée une propriété $\mathscr{P}$ dont on sait qu'elle est vérifiée pour une infinité d'indices n, on note n_0 le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(u_n)$ soit vraie, puis l'on note n_1 le plus petit entier $p > n_0$ tel que $\mathscr{P}(u_p)$ soit vraie, puis l'on note n_2 le plus petit entier $q > n_1$ tel que $\mathscr{P}(u_q)$ soit vraie, etc. : on construit ainsi pas-à-pas une sous-suite $(u_{n_0}, u_{n_1}, u_{n_2}, \dots)$ vérifiant la propriété voulue (voir l'exemple 4.3 ci-dessous et le lemme 4.7).

(4) Au lieu de noter la suite extraite avec un double indice : $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, on peut aussi introduire la fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$; alors la sous-suite est la suite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, qu'on peut aussi noter $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque 4.2. — Pour toute application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on a $\varphi(0) \geq 0$, puis comme $\varphi(1) > \varphi(0)$ on a $\varphi(1) \geq 1 + \varphi(0) \geq 1$; supposons donc avoir montré que $\varphi(n) \geq n$, alors comme $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ on a $\varphi(n+1) \geq 1 + \varphi(n) \geq 1 + n$. Ceci montre, par récurrence, que $\varphi(n) \geq n$ pour tout n, un résultat qu'on utilisera plusieurs fois par la suite.

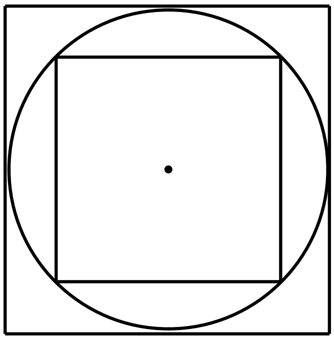
Exemple 4.3. — Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle *non majorée.* Alors il existe au moins un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$, notons $\varphi(0)$ le plus petit possible. Puis, il existe au moins un $p > \varphi(0)$ tel que $u_p > 1$ et $u_p > u_{\varphi(0)}$, notons $\varphi(1)$ le plus petit p possible. Soit $k \geq 2$ et supposons avoir construit une application strictement croissante $\varphi : \{0, 1, \dots, k-1\} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(0)} < \cdots < u_{\varphi(k-1)}$ et $u_{\varphi(i)} > i$ pour $i = 0, \dots, k-1$. Comme u est non majorée, l'ensemble

$$E_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n > \varphi(k-1),\ u_n > k \text{ et } u_n > u_{\varphi(k-1)}\}$$

est non vide, notons $\varphi(k)$ son plus petit élément. On construit ainsi pas-à-pas une sous-suite strictement croissante $v_n = u_{\varphi(n)}$ de u, telle que $v_n > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; en particulier v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On a donc démontré le résultat suivant :

> *De toute suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non majorée, *on peut extraire une sous-suite croissante* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tend vers* $+\infty$.

Avant de donner la définition de la convergence d'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), considérons la figure suivante :



(Q) ***Définition 4.4* (Disques ou carrés ouverts ou fermés)**. — Pour tout $c \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on définit le disque (resp. le carré) *ouvert* de centre c et de rayon (resp. de demi-côté) r par :

$$D(c,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\} \quad \text{resp.} \quad C(c,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathcal{R}e(z-c)| < r \text{ et } |\mathcal{I}m(z-c)| < r\}$$

et le disque (resp. le carré) *fermé* de centre c et de rayon (resp. de demi-côté) r par :

$$\overline{D}(c,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq r\} \quad \text{resp.} \quad \overline{C}(c,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathcal{R}e(z-c)| \leq r \text{ et } |\mathcal{I}m(z-c)| \leq r\}.$$

Alors la figure précédente montre que $D(c,r) \subset C(c,r)$ et $D(c,r) \supset C(c, \sqrt{2}r/2)$, et de même pour les disques et carrés fermés. On retiendra le slogan : *tout carré de centre c contient un disque de centre c, et réciproquement.*

(Q) ***Définition 4.5* (Convergence d'une suite complexe)**. — Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit qu'elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$ si l'on a $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, c.-à-d. si pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que u_n appartienne au disque ouvert $D(\ell, r)$ pour tout $n \geq n_0$.

D'après le slogan précédent, ceci équivaut à dire que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que u_n appartienne au carré ouvert $C(\ell, r)$ pour tout $n \geq n_0$, et ceci équivaut à dire, si l'on pose $a_n = \mathcal{R}e(u_n)$ et $b_n = \mathcal{I}m(u_n)$, que les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, respectivement, vers les réels $a = \mathcal{R}e(\ell)$ et $b = \mathcal{I}m(\ell)$. (Exercice : démontrer ces équivalences !)

(Q) ***Lemme 4.6***. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe convergeant vers une limite ℓ. Alors toute extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.*

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement des définitions : soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$; alors pour tout $n \geq n_0$ on a $\varphi(n) \geq n \geq n_0$ donc $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. Ceci montre que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Avant d'énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass, démontrons encore le lemme technique ci-dessous.

Lemme 4.7. — *De toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est* monotone*, c.-à-d. croissante ou décroissante.*

Démonstration. — Posons $X = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n, \quad u_p \geq u_n\}$. De deux choses l'une :

(1) Si X est un ensemble fini (éventuellement vide), il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $X \subset [0, n_0 - 1]$. Alors, comme $n_0 \notin X$, il existe $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_0} > u_{n_1}$. Puis, comme $n_1 > n_0$ on a $n_1 \notin X$ et donc il existe $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_1} > u_{n_2}$. Alors, comme $n_2 > n_0$ on a $n_2 \notin X$ et donc il existe $n_3 > n_2$ tel que $u_{n_2} > u_{n_3}$, etc. On construit ainsi, de proche en proche, une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui est strictement décroissante.

(2) Si X est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$, alors on peut numéroter ses éléments par ordre croissant, i.e. écrire que ses éléments sont $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Comme $n_0 \in X$, on a $u_{n_0} \leq u_{n_1}$, et comme $n_1 \in X$ on a $u_{n_1} \leq u_{n_2}$, etc. On obtient donc que la suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante (au sens large). Ceci prouve le lemme. □

(Q) ***Définition 4.8***. — Une partie A de $\mathbb{C}$ est dite *bornée* si elle est contenue dans un disque fermé de centre 0, i.e. s'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A \subset \overline{D}(0,R)$, c.-à-d. si pour tout $z \in A$ on a $|z| \leq R$. Noter que, puisque $\overline{D}(0,R) \subset \overline{C}(0,R)$, on a aussi $|\mathcal{R}e(z)| \leq R$ et $|\mathcal{I}m(z)| \leq R$ pour tout $z \in A$.

Une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *bornée* si l'ensemble $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ l'est, i.e. s'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|u_n| \leq R$ pour tout n. Si l'on pose $a_n = \mathcal{R}e(u_n)$ et $b_n = \mathcal{I}m(u_n)$, on a donc aussi $|a_n| \leq R$ et $|b_n| \leq R$ pour tout n, donc les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

(Q) ***Théorème 4.9* (de Bolzano-Weierstrass)**. — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe* bornée. *Alors il existe une sous-suite extraite $w_n = u_{\varphi(n)}$ qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$.*

Remarque 4.10. — Attention, il peut y avoir plusieurs suites extraites qui convergent vers des limites différentes. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ alors la suite extraite $P_n = u_{2n}$ est constante de valeur 1, tandis que la suite extraite $I_n = u_{2n+1}$ est constante de valeur -1. Donc le théorème de Bolzano-Weierstrass affirme simplement qu'il existe au moins une suite extraite qui est convergente. On verra plus bas des applications de ce théorème.

Démonstration. — Posons $a_n = \mathcal{R}e(u_n)$ et $b_n = \mathcal{I}m(u_n)$. Comme noté en 4.8, les suites réelles $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées. D'autre part, d'après le lemme 4.7, on peut extraire de a une sous-suite $A_n = a_{\alpha(n)}$ qui est monotone, comme elle est bornée, i.e. minorée et majorée, elle converge donc vers sa borne supérieure (resp. inférieure) si elle est croissante (resp. décroissante) ; notons A sa limite.

Considérons maintenant la suite $B_n = b_{\alpha(n)}$. Elle est bornée donc, par l'argument précédent, on peut en extraire une sous-suite $B_{\beta(n)} = b_{\alpha(\beta(n))}$ qui converge vers une limite $B \in \mathbb{R}$. De plus, d'après le lemme 4.6, la suite extraite $(A_{\beta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge encore vers A. Posons alors $\varphi = \alpha \circ \beta$, c'est une application strictement croissante $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, donc la suite définie par $u_{\varphi(n)} = A_{\beta(n)} + iB_{\beta(n)}$ est une suite extraite de u qui converge vers le nombre complexe $\ell = A + iB$. $\square$

4.1.2. Théorème des bornes atteintes. — Avant d'énoncer le « théorème des bornes atteintes » pour une fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$, où K désigne un disque (ou carré) fermé de $\mathbb{C}$, il nous faut dire ce qu'est une fonction continue de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(Q) ***Définition et proposition 4.11***. — *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{K}$ une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit A son domaine de définition.*

(i) *On dit que f est* continue *en un point $z_0 \in A$ si les conditions équivalentes ci-dessous sont vérifiées :*

(1) *pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ pour tout $z \in A \cap D(z_0, \delta)$,*

(2) *pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ pour tout $z \in A \cap C(z_0, \delta')$.*

(ii) *Si f est continue en z_0 alors, pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers z_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(z_0)$.*

(iii) *Si f et g sont continues en z_0, il en est de même de $f + g$ et de fg, et aussi de $1/g$ si $g(z_0) \neq 0$.*

(iv) *Si f est continue en z_0 alors la fonction $|f| : z \mapsto |f(z)|$ l'est aussi.*

(v) *Enfin, on dit que f est continue sur A si elle l'est en tout point z_0 de A. Par exemple, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ la fonction $z \mapsto P(z)$ est continue sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — L'équivalence des conditions (1) et (2) résulte de ce que $D(z_0, \delta) \subset C(z_0, \delta)$ et $C(z_0, \delta/\sqrt{2}) \subset D(z_0, \delta)$. Prouvons (ii) : supposons f continue en z_0 et soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergeant vers z_0. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme f est continue en z_0, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ pour tout $z \in A \cap D(z_0, \delta)$, et comme u converge vers z_0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in D(z_0, \delta)$ pour tout $n \geq n_0$. Alors, pour tout $n \geq n_0$ on a $|f(u_n) - f(z_0)| < \varepsilon$, et ceci montre que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(z_0)$.

Le point (iii) se démontre comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Comme la fonction $z \mapsto z$ est continue sur $\mathbb{C}$, on en déduit par récurrence sur n que toute fonction $z \mapsto z^n$, puis toute fonction polynôme $z \mapsto P(z)$, est continue sur $\mathbb{C}$.

Prouvons (iv). D'après l'inégalité triangulaire, on a $|f(z)| \leq |f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)|$ et donc

$$|f(z)| - |f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

En échangeant les rôles de z et z_0 on obtient de même que $|f(z_0)| - |f(z)| \leq |f(z) - f(z_0)|$ et en combinant les deux inégalités on obtient :

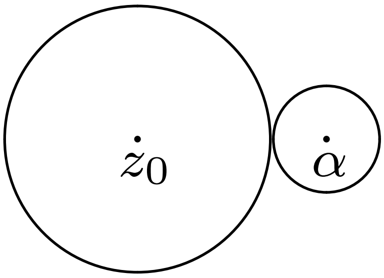
$$\Big| |f(z)| - |f(z_0)| \Big| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

Il en résulte que si f est continue en z_0 alors $|f|$ l'est aussi. $\square$

***Proposition 4.12* (Limites et inégalités larges).** — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergeant vers α et soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$. Si l'on a $u_n \in \overline{D}(z_0, R)$ (resp. $u_n \in \overline{C}(z_0, R)$) pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors on a $\alpha \in \overline{D}(z_0, R)$ (resp. $\alpha \in \overline{C}(z_0, R)$).*

Démonstration. — Le cas du carré résulte de ce qui a été vu en S1. En effet, l'hypothèse $u_n \in \overline{C}(z_0, R))$ signifie que $z_0 - R \leq \mathcal{Re}(u_n) \leq z_0 + R$ et $z_0 - R \leq \mathcal{Im}(u_n) \leq z_0 + R$. Comme la suite $\mathcal{Re}(u_n)$ (resp. $\mathcal{Im}(u_n)$) converge vers $\mathcal{Re}(\alpha)$ (resp. $\mathcal{Im}(\alpha)$) alors par passage à la limite on a $z_0 - R \leq \mathcal{Re}(\alpha) \leq z_0 + R$ et $z_0 - R \leq \mathcal{Im}(\alpha) \leq z_0 + R$ et donc $\alpha \in \overline{C}(z_0, R)$.

Pour le cas du disque, on reprend la démonstration faite en S1. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\alpha \notin \overline{D}(z_0, R)$ i.e. que $|\alpha - z_0| = r > R$. Alors $\overline{D}(z_0, R)$ et le disque ouvert $D(\alpha, r - R)$ sont disjoints :



Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \in D(\alpha, r - R)$ et donc $u_n \notin \overline{D}(z_0, R)$, contredisant l'hypothèse. Cette contradiction montre que $\alpha \in \overline{D}(z_0, R)$. $\square$

Lemme 4.13. — *Toute suite réelle ou complexe convergente est bornée.*

Démonstration. — Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe de limite ℓ. Prenant par exemple $\varepsilon = 1$, on obtient qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on ait $|u_n - \ell| < 1$ et donc $|u_n| < 1 + |\ell|$. Posant alors

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0}|, 1 + |\ell|),$$

on obtient que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

(Q) ***Théorème 4.14* (des bornes atteintes).** — *Soit K un disque fermé ou un carré fermé de $\mathbb{C}$ et soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur K.*

(i) *Alors $f(K)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure A et une borne inférieure a. De plus ces bornes sont atteintes, i.e. il existe $x, y \in K$ tels que $f(x) = A$ et $f(y) = a$.*

(ii) [1] *De plus, $f(K)$ est l'intervalle $[a, A]$.*

Démonstration. — *1ère partie.* Montrons d'abord que $f(K)$ est majoré. Raisonnons par l'absurde en supposant que ce ne soit pas le cas. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $z_n \in K$ tel que $|f(z_n)| > n$. On obtient ainsi une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K, qui est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\alpha \in \mathbb{C}$. D'après la proposition sur les inégalités larges, on a $\alpha \in K$, et comme f est continue au point z_0, la suite $u = (f(z_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\alpha)$, donc est bornée d'après le lemme précédent. D'autre part, par construction on a $|f(z_{\varphi(n)})| > \phi(n) > n$ pour tout n, donc la suite u n'est pas bornée, contradiction ! Cette contradiction montre que $f(K)$ est majoré, donc admet une borne supérieure A. On montre de même que $f(K)$ est minoré, donc admet une borne inférieure a.

[1] Pour la question de cours, on peut se contenter du point (i).

2ème partie. Montrons maintenant que la borne supérieure A est atteinte. Par définition de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in K$ tel que $A - \dfrac{1}{n} < |f(u_n)| \leq A$. On obtient ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de K, qui est donc bornée ; on en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers une limite $L \in K$. Comme f est continue au point L, la suite v définie par $v_n = f(u_{\varphi(n)})$ converge donc vers $f(L)$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$A - \frac{1}{\varphi(n)} < v_n \leq A$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\varphi(n)} = 0$, il résulte du théorème des gendarmes que le suite v converge vers A. Ceci prouve que $A = f(L)$. On prouve de même qu'il existe $\ell \in K$ tel que $a = f(\ell)$. Ceci prouve le point (i) du théorème. On a donc $f(K) \subset [a, A]$.

Prouvons le point (ii). L'application $s : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto s(t) = \ell + s(L - \ell) = (1-s)\ell + sL$ est continue, car $s(t') - s(t) = (t' - t)(L - \ell)$ et donc $|s(t') - s(t)| \leq |L - \ell|\,|t' - t|$. De plus, $s([0,1])$ est le segment $[\ell, L]$ qui est contenu dans K, car tout disque ou carré contient le segment joignant deux quelconques de ses points :

Alors l'application $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(s(t))$ est continue, étant une composée d'applications continues. On a $g(0) = f(\ell) = a$ et $g(1) = f(L) = A$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires $g([0,1])$ contient l'intervalle $[a, A]$. On a donc $[a, A] \subset g([0,1]) \subset f(K)$. Combiné avec l'inclusion $f(K) \subset [a, A]$, ceci montre que $f(K) = [a, A]$. $\square$

4.2. Suites de Cauchy et applications contractantes

(Q) ***Définition 4.15.*** — Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On dit que c'est une suite *de Cauchy* si « la suite double $|u_p - u_q|$ tend vers 0 quand p et q tendent vers $+\infty$, c.-à-d. si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_p - u_q| < \varepsilon$ pour tous $p, q \geq n_0$.

Lemme 4.16. — *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe convergeant vers une limite ℓ. Alors u est de Cauchy.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme u converge vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_p - \ell| < \varepsilon/2$ pour tout $p \geq n_0$. Alors, pour tous $p, q \geq n_0$, comme $u_p - u_q = (u_p - \ell) + (\ell - u_q)$, on a

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

et ceci montre que u est une suite de Cauchy. $\square$

***Théorème 4.17* (Critère de Cauchy).** — *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy réelle ou complexe. Alors u est convergente.*

Démonstration. — *1ère partie.* Montrons d'abord que u est *bornée.* Prenons $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq n_0$ on ait $|u_p - u_q| < 1$; prenant $q = n_0$ et écrivant $u_p = u_p - u_{n_0} + u_{n_0}$, on obtient que $|u_p| < 1 + |u_{n_0}|$ pour $p \geq n_0$. Posant alors

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, 1 + |u_{n_0}|),$$

on obtient que $|u_p| \leq M$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2ème partie. Comme u est bornée alors, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass en peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite ℓ. Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Comme

$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon/2$ pour tout $n \geq n_0$, et comme u est de Cauchy il existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que $|u_p - u_q| < \varepsilon/2$ pour tous $p, q \geq n_0'$. Posons $n_1 = \max(n_0, n_0')$. Alors pour tout $n \geq n_1$ on a $\varphi(n) \geq n \geq n_1$ et donc

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

et ceci montre que u converge vers ℓ. □

Question 4.18. — « Pourquoi introduire la notion de suite de Cauchy, puisque finalement une suite de Cauchy réelle ou complexe n'est rien d'autre qu'une suite convergente ? » peut-on se demander. La raison est que le critère de Cauchy permet de montrer qu'une suite converge *sans connaître a priori sa limite.* Nous en verrons plus bas une illustration avec le théorème du point fixe.

Remarque 4.19. — Attention ! La condition $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ **ne suffit pas** pour dire que la suite u est de Cauchy. Par exemple, considérons la suite auxilliaire a définie par $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = -1/2$, $a_4 = a_5 = a_6 = 1/3$, puis les quatre termes suivants $u_7, \ldots, u_{10}$ valent $-1/4$, puis les cinq termes suivants $u_{11}, \ldots, u_{15}$ valent $1/5$, puis les six termes suivants $u_{16}, \ldots, u_{21}$ valent $-1/6$, etc. et soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = a_1 + \cdots + a_n$. Alors on voit que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0, mais la suite u n'est pas convergente (donc pas de Cauchy), car elle oscille en prenant des valeurs entre 0 et 1 ; ses premiers termes sont : $1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 0$ etc.

(Q) ***Définition 4.20.*** — Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, k un réel tel que $0 \leq k < 1$. Soient f une fonction $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ et $\operatorname{dom}(f)$ son domaine de définition. On dit que f est *k-contractante* (ou *contractante de rapport k*) si pour tout $x, y \in \operatorname{dom}(f)$ on a $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$.

Remarquons que ceci entraîne que f est *continue* en tout point $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ puisque pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in \operatorname{dom}(f)$ tel que $|x - x_0| < \varepsilon$ on a $|f(x) - f(x_0)| \leq k\,|x - x_0| < \varepsilon$.

Si $k = 0$ la condition entraîne que $f(x) = f(y)$ pour tout $x, y \in \operatorname{dom}(f)$, i.e. que f est constante, donc la notion n'est pas intéressante pour $k = 0$.

Soit f comme plus haut et soit $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$. On pose $x_1 = f(x_0)$ et on voudrait pouvoir définir et étudier la suite des images successives : $x_{n+1} = f(x_n)$. Pour pouvoir le faire, il faut qu'à chaque étape on ait $x_n \in \operatorname{dom}(f)$ pour pouvoir lui appliquer f. Cette condition sera vérifée pour tout $n \in \mathbb{N}$ si l'on part de $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$ et qu'on fait l'hypothèse : $\boxed{f(\operatorname{dom}(f)) \subset \operatorname{dom}(f).}$ En pratique, $\operatorname{dom}(f)$ sera un disque dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (un disque dans $\mathbb{R}$ étant un intervalle).

Définition 4.21. — Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une application. On dit que $x \in E$ est un *point fixe* de f si $f(x) = x$.

(Q) ***Théorème 4.22* (du point fixe).** — *Soit $\overline{D} = \overline{D}(c, R)$ un disque* fermé *de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $f : \overline{D} \to \overline{D}$ une application qui est k-contractante, pour un certain $k \in]0, 1[$ fixé. Alors f possède dans $\overline{D}$ un unique point fixe a, i.e. il existe un unique $a \in \overline{D}$ tel que $f(a) = a$.*

Démonstration. — Démontrons d'abord l'unicité. Supposons qu'on ait deux points fixes a_1, a_2. Alors on a :

$$0 \leq |a_2 - a_1| = |f(a_2) - f(a_1)| \leq k\,|a_2 - a_1| \leq |a_2 - a_1|$$

et ceci entraîne que $|a_2 - a_1| = 0$ (car sinon la dernière inégalité serait stricte), d'où $a_2 = a_1$. Ceci montre qu'il y a au plus un point fixe.

Montrons l'existence. Soit $x_0 \in \overline{D}$ arbitraire. Alors $x_1 = f(x_0)$ appartient à $\overline{D}$ donc on peut poser $x_2 = f(x_1)$ qui appartient encore à $\overline{D}$; on peut donc construire par récurrence $x_{n+1} = f(x_n) \in \overline{D}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme f est k-contractante, on a :

$$|x_2 - x_1| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq k\,|x_1 - x_0|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons avoir montré que $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$ (ce qui est la cas pour $n = 1$). Alors on a :

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq k\,|x_{n+1} - x_n| \leq k^{n+1} |x_1 - x_0|.$$

Ceci montre, par récurrence, que $\boxed{|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $p < q$, écrivant que

$$x_q - x_p = (x_q - x_{q-1}) + (x_{q-1} - x_{q-2}) + \cdots + (x_{p+1} - x_p)$$

on obtient que $|x_q - x_p| \leq (k^{q-1} + k^{q-2} + \cdots + k^p)\,|x_1 - x_0|$. Or

$$k^{q-1} + k^{q-2} + \cdots + k^p = k^p(1 + k + \cdots + k^{q-p-1}) = k^p \frac{1 - k^{q-p}}{1-k} \leq k^p \frac{1}{1-k}$$

et donc, pour tout $p \leq q$ on a $\boxed{|x_q - x_p| \leq \dfrac{k^p}{1-k}|x_1 - x_0|}$ et il en résulte que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En effet, si $x_1 = x_0$, alors x_0 est un point fixe de f et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur x_0. Supposons donc $x_1 \neq x_0$. Comme $k \in]0,1[$, la suite $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 < k^p < \dfrac{(1-k)}{|x_1 - x_0|}\varepsilon$ pour tout $p \geq n_0$. Alors pour tout $q \geq p \geq n_0$ on a $|x_q - x_p| < \varepsilon$, ce qui montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle converge donc vers une limite a. Comme $|x_n - c| \leq R$ pour tout n et comme les inégalités larges sont préservées par passage à la limite (4.12), on a aussi $|a - c| \leq R$ i.e. $a \in \overline{D} = \overline{D}(c,R)$.

Enfin, comme f est continue en a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$; mais comme $f(x_n) = x_{n+1}$ cette suite converge vers a. Par unicité de la limite, on a donc $f(a) = a$. Le théorème est démontré. □

***Exemple 4.23* (dans $\mathbb{C}$).** — Comme nous étudierons dans le paragraphe suivant les suites récurrentes réelles $u_{n+1} = f(u_n)$, donnons ici une application du théorème du point fixe dans le cas complexe. Soient $n < p$ dans $\mathbb{N}^*$ et soit $a \in \overline{D} = \overline{D}(0,1)$. Pour tout $z \in \overline{D}$, posons $f(z) = \dfrac{z^n + a}{p}$. Comme $|z| \leq 1$ on a aussi $|z^n| = |z|^n \leq 1$, et comme $p \geq 2$ on obtient

$$|f(z)| = \frac{|z^n + a|}{p} \leq \frac{|z^n| + |a|}{p} \leq \frac{2}{p} \leq 1$$

donc $f(\overline{D}) \subset \overline{D}$. D'autre part, pour tout $x, y \in \overline{D}$ on a :

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{p}(x^n - y^n) = \frac{1}{p}(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})(x-y)$$

et comme $|x^{n-i}y^i| \leq 1$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$ on obtient que

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}|}{p}|x - y| \leq \frac{n}{p}|x - y|.$$

Donc $f : \overline{D} \to \overline{D}$ est contractante de rapport $k = \dfrac{n}{p} < 1$. Il en résulte que f possède dans $\overline{D}$ un unique point fixe a, qui est la limite de la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout choix du terme initial $u_0 \in \overline{D}$.

4.3. Suites récurrentes réelles

Dans ce paragraphe, on va étudier les suites réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction qui sera toujours supposée *dérivable*, et si nécessaire de classe C^1. On suppose que :

$$\boxed{f \text{ est définie sur un intervalle } \textit{fermé } I \text{ et } f(I) \subset I, \text{ et l'on se donne } u_0 \in I.}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut poser $u_{n+1} = f(u_n)$, ce qui donne une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On veut étudier les propriétés de cette suite : croissance ou décroissance, existence d'une limite, etc. Le premier résultat est le suivant :

(Q) ***Proposition 4.24.*** — **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite* ℓ, *alors* $\ell \in I$ *et* $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. — Comme I est un intervalle fermé, on a $I = \mathbb{R}$ ou bien $I =]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ ou $[a, b]$. Comme les inégalités larges $u_n \leq b$ et/ou $a \leq u_n$ sont préservées par passage à la limite, on a $\ell \in I$.

Puis, comme f est continue en $\ell \in I$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$; mais comme $f(u_n) = u_{n+1}$ cette suite converge vers ℓ. Par unicité de la limite, on a donc $f(\ell) = \ell$. □

Attention, même si f possède dans I un point fixe c, la suite u ne converge pas nécessairement vers c !

4.3.1. Points fixes répulsifs ou attractifs. —

Définition 4.25. — On dit qu'une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Lemme 4.26. — *Soit* $c \in I$ *un point fixe de* f. *Si* $|f'(c)| > 1$, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne peut converger vers* c *que si elle est stationnaire, c.-à-d. s'il existe un indice* n_0 *tel que* $u_{n_0} = c$.

Démonstration. — Posons $k = \dfrac{|f'(c)| + 1}{2}$, alors $k > 1$. Comme $f'(c)$ est la limite quand x tend vers c de $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \dfrac{f(x) - c}{x - c}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\left|\dfrac{f(x) - c}{x - c}\right| > k$ si $x \neq c$ et $|x - c| < \delta$, et l'on a donc $|f(x) - c| \geq k\,|x - c|$ pour tout $x \in]c - \delta, c + \delta[$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - c| < \delta$ pour tout $n \geq n_0$. Montrons par récurrence sur p que $|u_{n_0+p} - c| \geq k^p\,|u_{n_0} - c|$. C'est vrai pour $p = 0$, et supposant ceci établi pour un certain $p \in \mathbb{N}$ on a, puisque $u_{n_0+p} - c \in]c - \delta, c + \delta[$:

$$|u_{n_0+p+1} - c| = |f(u_{n_0+p}) - c| \geq k\,|u_{n_0+p} - c| \geq k^{p+1}\,|u_{n_0} - c|.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a donc : $\delta > |u_{n_0+p} - c| \geq k^p\,|u_{n_0} - c|$, et comme $k > 1$ ceci n'est possible que si $u_{n_0} = c$. □

Exemple 4.27. — La fonction $f(x) = -\pi \sin(x)$ envoie l'intervalle fermé $I = [-\pi, \pi]$ dans lui-même et 0 est l'unique point fixe (vérifier ces assertions !). On a $|f'(0)| = \pi > 1$, donc pour tout $u_0 \in I$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0 que si elle est stationnaire. Ceci est le cas, par exemple, si on prend $u_0 = \pi/6$. Alors $u_1 = -\pi/2$ puis $u_2 = \pi$ et $u_3 = 0$.

Définition 4.28. — Soit $c \in I$ un point fixe de f.

(i) Si $|f'(c)| > 1$ on dit que c est un point fixe *répulsif.* Ceci est justifié par la preuve du lemme précédent : il existe un intervalle ouvert J centré en c tel que $|f(x) - c| > |x - c|$ pour tout $x \in J - \{c\}$, i.e. dans $J - \{c\}$ appliquer f « éloigne de c ».

(ii) Si $|f'(c)| < 1$ on dit que c est un point fixe *attractif.* Ceci est justifié par la proposition suivante.

(Q) ***Proposition 4.29*** **(Points fixes attractifs).** — *Soit* $f : I \to I$ *de classe* C^1. *Soit* $c \in I$ *un point fixe de* f *tel que* $|f'(c)| < 1$.

(i) *Il existe* $k \in]0, 1[$ *et* $\delta > 0$ *tels que* $|f(x) - c| \leq k\,|x - c|$ *pour tout* $x \in J = [c - \delta, c + \delta]$.

(ii) *Par conséquent,* $f(J) \subset J$ *et pour tout* $u_0 \in J$ *la suite* u *définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$ *vérifie* $|u_n - c| \leq k^n\,|u_0 - c|$ *donc converge vers* c.

Démonstration. — Fixons k tel que $|f'(c)| < k < 1$. Comme la fonction $x \mapsto |f'(x)|$ est continue en c, il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x)| < k$ pour tout $x \in]c - \delta, c + \delta[$. Posons $J = [c - \delta, c + \delta]$. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in J$ on a $f(x) - c = f(x) - f(c) = (x - c)f'(\alpha)$ pour un certain α compris entre x et c, d'où

$$|f(x) - c| = |(x - c)|\,|f'(\alpha)| \leq k\,|(x - c)| \leq k\delta < \delta.$$

Ceci prouve (i), ainsi que le fait que $f(x) \in J$. On a donc $f(J) \subset J$.

L'inégalité $|u_n - c| \leq k^n |u_0 - c|$ est vraie pour $n = 0$; supposons-la établie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors on a :

$$|u_{n+1} - c| = |f(u_n) - c| \leq k\,|u_n - c| \leq k^{n+1}\,|u_0 - c|.$$

On a donc $|u_n - c| \leq k^n |u_0 - c|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et comme $0 < k < 1$ il en résulte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c. □

Remarques 4.30. — (1) La proposition précédente est un résultat *théorique* : en pratique il faut déterminer explicitement un intervalle $J = [c-\delta, c+\delta]$ tel que $|f'(x)| \leq k < 1$ pour tout $x \in J$; la convergence est alors assurée si $u_{n_0} \in J$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Ensuite, si $u_0 \notin J$, il faut voir si après un certain nombre d'itérations $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient un terme $u_{n_0} \in J$.

(2) D'autre part, on va voir plus bas des critères de convergence basés sur des conditions de croissance (ou décroissance), et qui sont valables aussi dans le cas où $f'(c) = 1$.

La proposition suivante nous sera utile plus loin, dans l'étude de la méthode de Newton pour trouver une valeur approchée d'une équation $f(x) = 0$ (sous certaines hypothèses sur f).

***Proposition 4.31* (Points fixes super-attractifs).** — *Soit $f : I \to I$ de classe C^2 et soit $c \in I$ un point fixe de f tel que $f'(c) = 0$.*

(i) *Il existe un intervalle fermé $I' = [c-\delta, c+\delta]$, avec $\delta > 0$, tel que $f(I') \subset I'$ et que pour tout $u_0 \in I'$ la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers c.*

(ii) *Soit $M = \mathrm{Max}_{x\in I'} |f''(x)|$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I'$ on a* $\boxed{\dfrac{M}{2}|f^p(x) - c| \leq \Big(\dfrac{M}{2}|x-c|\Big)^{2^p}}$ *où l'on a posé $f^p = f \circ \cdots \circ f$ (p fois).*

(iii) *Supposons $M > 0$ (si $M = 0$, alors $f''(x) = 0$ pour $x \in I'$ donc f' est constante sur I' de valeur $f'(c) = 0$ donc f est constante sur I' de valeur $f(c) = c$). Fixons $\alpha \in]0,1[$ et posons $J = [c-r, c+r]$ où $r = 2\alpha/M$. Pour tout $u_0 \in I'$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in J$ et alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :*

$$(*) \qquad |u_{n_0+p} - c| \leq \frac{2}{M}\Big(\frac{M}{2}|u_{n_0} - c|\Big)^{2^p} \leq \frac{2}{M}\alpha^{2^p}$$

et donc la convergence vers c est très rapide à partir du cran n_0. Pour cette raison, lorsque $f'(c) = 0$ on dit que c est un point fixe super-attractif.

Démonstration. — Le point (i) découle de la proposition 4.29. Prouvons (ii). Soit $x \in I'$, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe λ compris entre c et x tel que

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2}{2}f''(\lambda) = c + \frac{(x-c)^2}{2}f''(\lambda)$$

et comme $|f''(\lambda)| \leq M$ on a donc $|f(x) - c| \leq \dfrac{M}{2}|x-c|^2$ et donc

$$\frac{M}{2}|f(x) - c| \leq \Big(\frac{M}{2}|x-c|\Big)^2$$

ce qui prouve l'inégalité voulue pour $p = 1$. Supposons-la établie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Comme $f(I') \subset I'$, on a $f^p(x) \in I'$ d'où la première inégalité ci-dessous (la seconde découlant de l'hypothèse de récurrence) :

$$\frac{M}{2}|f^{p+1}(x) - c| = \frac{M}{2}|f(f^p(x)) - c| \leq \Big[\frac{M}{2}|f^p(x) - c|\Big]^2 \leq \Big[\Big(\frac{M}{2}|x-c|\Big)^{2^p}\Big]^2 = \Big(\frac{M}{2}|x-c|\Big)^{2^{p+1}}.$$

On a donc $\dfrac{M}{2}|f^p(x) - c| \leq \Big(\dfrac{M}{2}|x-c|\Big)^{2^p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, ce qui prouve (ii).

Enfin, prouvons (iii), en supposant $M > 0$. Fixons $u_0 \in I'$. D'après (i), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in J$ pour tout $n \geq n_0$, en particulier pour $n = n_0$. Puisque $u_{n_0+p} = f^p(u_{n_0})$, alors $(*)$ découle de (ii). Prenons par exemple $\alpha = 1/2$; comme $2^{10} = 1024$ on voit que $(1/2)^{10} < 10^{-3}$ d'où $(1/2)^{32} < (1/2)^{30} < 10^{-9}$, donc après 5 itérations à partir de u_{n_0} on obtient que $|u_{n_0+5} - c| < \dfrac{2}{M}10^{-9}$, ce qui montre la rapidité de la convergence. □

4.3.2. Conditions de croissance ou décroissance. — On veut aussi étudier à quelles conditions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante. Le premier résultat est le suivant.

(Q) ***Proposition 4.32.*** — *Soient $f : I \to I$* croissante *et $u_0 \in I$. Alors la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone. Plus précisément :*

(i) *Si $f : I \to I$ est croissante et $f(u_0) \le u_0$, alors u est* décroisssante.
(ii) *Si $f : I \to I$ est croissante et $f(u_0) \ge u_0$, alors u est* croisssante.

Démonstration. — (i) Si $u_1 = f(u_0) \le u_0$ alors, comme f est croissante, on obtient $u_2 = f(u_1) \le f(u_0) = u_1$. Supposant avoir montré que $u_{n+1} \le u_n$, on obtient $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \le f(u_n) = u_{n+1}$. Donc u est décroissante. La preuve est analogue dans le cas (ii). □

(Q) ***Corollaire 4.33.*** — *Soit $f : I \to I$* décroissante, *et soient $u_0 \in I$ et u la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones* de sens contraire. *Plus précisément, $f^2 = f \circ f$ est croissante et :*

(1) *si $u_0 \le u_2$ (resp. $u_0 \ge u_2$), alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante (resp. $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante).*

(2) *De plus, la position des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par ce qui suit :*

(i) *Si $u_1 \le u_0 \le u_2$ alors $\cdots \le u_3 \le u_1 \le u_0 \le u_2 \le \cdots$ donc la suite u ne converge pas, sauf si $u_1 = u_0$ i.e. si u_0 est un point fixe de f.*

(i′) *De même, si $u_2 \le u_0 \le u_1$ alors $\cdots \le u_2 \le u_0 \le u_1 \le u_3 \le \cdots$ donc la suite u ne converge pas, sauf si $u_1 = u_0$ i.e. si u_0 est un point fixe de f.*

(ii) *Si $u_0 \le u_2$ et $u_0 \le u_1$ alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers sa borne supérieure α et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers sa borne inférieure β ; on a $\alpha \le \beta$ et ce sont deux points fixes de f^2. Dans ce cas, u converge si et seulement si $\alpha = \beta$.*

(ii′) *De même, si $u_0 \ge u_2$ et $u_0 \ge u_1$ alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers sa borne inférieure β et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers sa borne supérieure α ; on a $\alpha \le \beta$ et ce sont deux points fixes de f^2. Dans ce cas, u converge si et seulement si $\alpha = \beta$.*

Démonstration. — Comme f est décroissante, pour tout $x \le y$ dans I on $f(x) \ge f(y)$ et donc $f^2(x) \le f^2(y)$, donc f^2 est croissante. Le point (1) découle alors de la proposition 4.32.

Étudions maintenant la position des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ Si $u_0 \le u_1$ (resp. $u_0 \ge u_1$) alors en appliquant de façon répétée f^2 on obtient $u_{2n} \le u_{2n+1}$ (resp. $u_{2n} \ge u_{2n+1}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent :

(i) Si $u_1 \le u_0 \le u_2$ alors $\cdots \le u_3 \le u_1 \le u_0 \le u_2 \le \cdots$ donc la suite u ne converge pas, sauf si $u_1 = u_0$ i.e. si u_0 est un point fixe de f.

(i′) Si $u_2 \le u_0 \le u_1$ alors $\cdots \le u_2 \le u_0 \le u_1 \le u_3 \le \cdots$ donc la suite u ne converge pas, sauf si $u_1 = u_0$ i.e. si u_0 est un point fixe de f.

(ii) Si $u_0 \le u_2$ et $u_0 \le u_1$ alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \le u_{2n} \le u_{2n+1} \le u_1$$

alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par u_1 (resp. $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_0) donc converge vers sa borne supérieure α (resp. inférieure β) et l'on a $\alpha \le \beta$; de plus ce sont deux points fixes de f^2, d'après la prop. 4.24.

(ii′) De même, si $u_0 \ge u_2$ et $u_0 \ge u_1$ alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \ge u_{2n} \ge u_{2n+1} \ge u_1$$

alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par u_1 (resp. $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par u_0) donc converge vers sa borne inférieure β (resp. supérieure α) et l'on a $\alpha \le \beta$ et ce sont deux points fixes de f^2. □

4.3.3. Représentation graphique. — On peut représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphe de f. Dans l'exemple suivant, on a $f'(x) \in]-1, 0[$ au voisinage du point fixe c et $f(u_0) > u_0$ et l'on est dans le cas (ii) du corollaire : la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, elles convergent toutes les deux vers le point fixe c. Le lecteur est vivement invité à faire des dessins analogues dans les autres cas, i.e. quand $0 < f'(x) < 1$ ou bien $f'(x) > 1$ ou bien $f'(x) < -1$ au voisinage du point fixe c.