CHAPITRE 7

APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES, ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES

Dans tout ce chapitre on fixe un corps $\mathbb{K}$.

7.1. Applications linéaires et matrices

Dans le chapitre 3 on avait vu qu'une matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ déterminait une application linéaire $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, $X \mapsto AX$. On va reformuler ceci une première fois comme suit.

(Q) ***Théorème 7.1.*** — *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.*

(i) *Pour tout n-uplet $(v_1, \dots, v_n)$ d'éléments de F,* il existe une unique *application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = v_i$ pour $i = 1, \dots, n$.*

(ii) *En d'autres termes, se donner une application linéaire $f : E \to F$ est la même chose que se donner un n-uplet $(v_1, \dots, v_n)$ d'éléments de F.*

(iii) *On retiendra ceci sous la forme du slogan :* « une application linéaire est déterminée par les images des vecteurs d'une base, qui peuvent être choisies arbitrairement ».

Démonstration. — Soient $v_1, \dots, v_n \in F$. Comme tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, on peut définir une application $f : E \to F$ en posant $f(x) = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, et il faut vérifier que f est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$, alors $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1)e_1 + \cdots + (\lambda x_n + y_n)e_n$ et donc, par définition, on a les égalités :

$$f(\lambda x+y) = (\lambda x_1+y_1)v_1+\cdots+(\lambda x_n+y_n)v_n = \lambda(x_1v_1+\cdots+x_nv_n)+(y_1v_1+\cdots+y_nv_n) = \lambda f(x)+f(y),$$

ce qui prouve que f est bien linéaire. De plus, f est unique car toute application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(e_i) = v_i$ pour $i = 1, \dots, n$ vérifie nécessairement, pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$:

$$f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n.$$

Ceci prouve (i). Donc toute application linéaire $f : E \to F$ est uniquement déterminée (par la formule ci-dessus) par la donnée des images $v_i = f(e_i)$, et celles-ci peuvent être choisies arbitrairement dans F. Le théorème est démontré. □

Avant de reformuler à nouveau ce théorème, introduisons les définitions suivantes.

Définitions 7.2. — Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de V.

(i) Tout $x \in V$ s'écrit de façon unique $x = x_1f_1 + \cdots + x_pf_p$. On dit que $(x_1, \dots, x_p)$ sont les *coordonnées* de x dans la base $\mathscr{C}$ et l'on associe à x le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ qui est le « vecteur des coordonnées de x » dans la base $\mathscr{C}$. On dit aussi que x est « *représenté dans la base $\mathscr{C}$* » par le vecteur colonne X.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout n-uplet $(v_1, \ldots, v_n)$ d'éléments de V, on note $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(v_1, \ldots, v_n)}$ la matrice dont la j-ème colonne représente le vecteur v_j dans la base $\mathscr{C}$, i.e. si pour tout $j = 1, \ldots, n$ on écrit $v_j = a_{1j} f_1 + \cdots + a_{pj} f_p$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(v_1, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

On peut maintenant reformuler le théorème 7.1 comme suit.

(Q) ***Théorème et définition 7.3*** **(Matrice d'une application linéaire dans des bases)**
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.

(i) *À toute application linéaire $u : E \to F$, on associe la matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ exprimant les vecteurs $u(e_1), \ldots, u(e_n)$ dans la base $\mathscr{C}$. Dans ce cours, A est notée* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$. (1)

(ii) *Pour tout $x \in E$, notons X le vecteur colonne représentant x dans la base $\mathscr{B}$. Alors le vecteur colonne Y représentant $u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ est donné par* $\boxed{Y = AX.}$

(iii) *L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$ est une* bijection *entre l'ensemble des applications linéaires $E \to F$ et $M_{p,n}(\mathbb{K})$, la bijection réciproque associant à toute matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ l'application linéaire $X \mapsto AX$.*

(iv) *On pourra retenir ceci sous la forme du slogan :* « Les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ étant fixées, il revient au même de se donner une application linéaire $u : E \to F$ ou sa matrice dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ ».

Démonstration. — Prouvons (ii). Écrivons $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, alors on a

$$u(x) = \sum_{j=1}^n x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^p a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^p \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \Big) f_i$$

donc la i-ème coordonnée y_i de $u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ égale $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, qui est le coefficient de la i-ème ligne de la matrice colonne AX. Ceci prouve que $Y = AX$, d'où (ii). Alors (iii) et (iv) ne sont que des reformulations du théorème 7.1. □

Corollaire 7.4 **(Matrice d'un endomorphisme dans une base)**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. Alors on peut prendre la même base $\mathscr{B}$ de E « au départ et à l'arrivée ». Dans ce cas :

(i) *La matrice* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u) \in M_n(\mathbb{K})$ *est notée simplement* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
(ii) *On obtient ainsi une* bijection *entre l'ensemble des endomorphismes de E et $M_n(\mathbb{K})$.*

On a le théorème fondamental suivant, duquel on déduira plus bas toutes les formules de changement de bases.

(Q) ***Théorème 7.5*** **(Matrice d'une composée)**. — *Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, resp. $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$, resp. $\mathscr{D} = (g_1, \ldots, g_q)$ une base de E, resp. F, resp. G, et soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ des applications linéaires. Alors la composée $v \circ u : x \mapsto v(u(x))$ est une application linéaire $E \to G$, et l'on a :*

$$(\spadesuit) \qquad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{B}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(v)\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)}$$

Démonstration. — Écrivons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u) = A = (a_{kj})_{\substack{k=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(v) = B = (b_{ik})_{\substack{i=1,\ldots,q \\ k=1,\ldots,p}}$. Alors, pour tout $j = 1, \ldots, n$, on a :

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^p a_{kj} f_k \quad \text{et donc} \quad v(u(e_j)) = \sum_{k=1}^p a_{kj} v(f_k) = \sum_{k=1}^p a_{kj} \sum_{i=1}^q b_{ik} g_i = \sum_{i=1}^q \Big(\sum_{k=1}^p b_{ik} a_{kj} \Big) g_i$$

(1) D'autres notations existent. Celle-ci est justifiée, de l'avis de l'auteur, par la formule de composition 7.5 (♠).

donc la i-ème coordonnée dans la base $\mathscr{D}$ de $(v \circ u)(e_j)$ est $\sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj} = (BA)_{ij}$. Ceci prouve que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{B}}(v \circ u)$ égale BA. Le théorème est démontré. $\square$

(Q) ***Définition et proposition 7.6*** **(Matrices de passage)**. — *Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V. Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une deuxième base de V.*

(i) *La matrice $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \in M_n(\mathbb{K})$, qui exprime les vecteurs $e'_1, \dots, e'_n$ dans la base $\mathscr{B}$, est appelée* matrice de passage *de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*

(ii) *Cette matrice est inversible et son inverse est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$.*

Démonstration. — Soit id_V l'application identique de V, i.e. $\mathrm{id}_V(x) = x$ pour tout $x \in V$. Remarquons que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_V)$. Comme $\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V$, la formule fondamentale 7.5 ($\spadesuit$) donne

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_V)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V) = I_n$$

et de même $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_V) = I_n$. Ceci montre que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$. $\square$

Remarque 7.7. — On peut aussi démontrer la propositition précédente par le calcul direct suivant. Écrivons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = P = (p_{ik})_{i,k=1,\dots,n}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = Q = (q_{kj})_{k,j=1,\dots,n}$. Alors pour tout $j = 1, \dots, n$ on a :

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} q_{kj}e'_k = \sum_{k=1}^{n} q_{kj}\Big(\sum_{i=1}^{n} p_{ik}e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}q_{kj}\Big)e_i = \sum_{i=1}^{n}(PQ)_{ij}\, e_i.$$

Comme l'écriture de e_j dans la base $\mathscr{B}$ est unique, ceci entraîne que $(PQ)_{ij} = 1$ si $i = j$ et $= 0$ sinon, et donc $PQ = I_n$. On montre de même que $QP = I_n$.

(Q) ***Théorème 7.8*** **(Formules de changement de bases)**. — *Soit $u : E \to F$ une application linéaire, soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ (resp. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$) des bases de E (resp. F) et soient $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}')$.*

(i) *Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(u)$. Alors $\boxed{A' = Q^{-1}AP.}$*

(ii) *Supposons $F = E$, alors u est un endomorphisme de E. Posant $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, on a alors la formule $\boxed{A' = P^{-1}AP.}$*

Démonstration. — Comme $u = \mathrm{id}_F \circ u \circ \mathrm{id}_E$, la formule fondamentale 7.5 ($\spadesuit$) donne :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}',\mathscr{C}}(\mathrm{id}_F)\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}'}(\mathscr{C})A\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = Q^{-1}AP.$$

Ceci prouve (i), et (ii) en découle en prenant $\mathscr{C} = \mathscr{B}$ et $\mathscr{C}' = \mathscr{B}'$ d'où $Q = P$ dans ce cas. $\square$

(Q) ***Théorème 7.9*** **(Formule de changement de coordonnées)**. — *Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de V et P la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Pour tout $x \in V$, notons X (resp. X') le vecteur colonne représentant x dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$). Alors on a $\boxed{X = PX'.}$* *Attention ! Ici c'est X qui est exprimé en fonction de X'.*

Démonstration. — On a $x = \mathrm{id}_V(x)$ donc en prenant la base $\mathscr{B}$ au départ et $\mathscr{B}'$ à l'arrivée, la formule $Y = AX$ de 7.3 (ii) donne ici $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_V)X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})X = P^{-1}X$, d'où $X = PX'$. $\square$

Terminons cette section avec la proposition suivante : la conclusion $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u + \lambda v) = A + \lambda B$ est importante en pratique et on s'en servira à de nombreuses reprises dans la suite.

Proposition 7.10. — *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{C}$) une base de E (resp. F). Soient $u, v : E \to F$ deux applications linéaires et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*

(i) *L'application $u + \lambda v : E \to F$, $x \mapsto u(x) + \lambda v(x)$ est* linéaire.

(ii) *Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v)$, alors* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u + \lambda v) = A + \lambda B.}$

Démonstration. — Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, on a $(u+\lambda v)(\alpha x) = u(\alpha x)+\lambda v(\alpha x) = \alpha u(x)+\alpha\lambda v(x) = \alpha(u + \lambda v)(x)$, et pour $x, y \in E$ on a :

$$\begin{aligned}(u + \lambda v)(x + y) = u(x + y) + \lambda v(x + y) &= u(x) + u(y) + \lambda v(x) + \lambda v(y)\\ &= (u + \lambda v)(x) + (u + \lambda v)(y).\end{aligned}$$

Ceci prouve que $u + \lambda v$ est linéaire. Notons $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u + \lambda v)$ et écrivons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Pour $j = 1, \dots, n$, on a $(u + \lambda v)(e_i) = u(e_i) + \lambda v(e_i)$ et donc $C = A + \lambda B$. □

7.2. Polynôme caractéristique, valeurs et espaces propres

***Définition et proposition 7.11* (Trace d'un endomorphisme)**

(Q) *Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de V.*

(i) *Soient $\mathscr{B}$ une base de V et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. On pose $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(A)$.*

(ii) *Ceci ne dépend pas de la base choisie : si $\mathscr{B}'$ est une autre base, P la matrice de passage et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, on a $\mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$.*

Démonstration. — Pour tout $B, C \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\boxed{\mathrm{Tr}(BC) = \mathrm{Tr}(CB).}$ En effet :

$$\mathrm{Tr}(BC) = \sum_{i=1}^{n}(BC)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ki}b_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(CB)_{kk} = \mathrm{Tr}(CB).$$

Appliquant ceci à $B = P^{-1}$ et $C = AP$, on obtient $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(APP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$. □

***Remarque 7.12* (Permutations de $\{1, \dots, n\}$ et forme explicite du déterminant)**

Revenons sur le calcul du déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. En développant par rapport à la 1ère ligne :

$$\mathrm{dét}(A) = \sum_{j_1=1}^{n}(-1)^{1+j_1} a_{1j_1}\,\mathrm{dét}(A - L_1 - C_{j_1})$$

on voit que chaque déterminant $\mathrm{dét}(A - L_1 - C_{j_1})$ ne contient plus aucun coefficient de la ligne L_1 ni de la colonne C_{j_1} de A. En procédant par récurrence, on voit que $\mathrm{dét}(A)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{dét}(A) = \sum_{\substack{1\le j_1,\dots,j_n\le n\\ j_p\neq j_q \text{ si } p\neq q}} \pm\, a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

c.-à-d., c'est la somme, avec certains signes $\pm$, de tous les produits possibles $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ obtenus en prenant un seul coefficient a_{ij} dans chaque ligne et chaque colonne. Ceci revient à choisir : dans la ligne 1 un indice de colonne j_1, puis dans la ligne 2 un indice de colonne $j_2 \neq j_1$, puis dans la ligne 3 un indice de colonne j_3 choisi dans $\{1, \dots, n\} - \{j_1, j_2\}$, etc. Chaque tel choix correspond donc à la donnée d'une application $i \mapsto j_i$ de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même qui est injective, donc bijective.

Une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même s'appelle une *permutation* de $\{1, \dots, n\}$, et l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ est noté S_n. On obtient donc que $\mathrm{dét}(A)$ est la somme, pour tous les éléments σ de S_n, des produits

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

chacun étant précédé d'un signe $\pm$ qui ne dépend que de σ et qui est noté $\varepsilon(\sigma)$. En formule, ceci s'écrit :

$$(\heartsuit) \qquad \mathrm{dét}(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Exemples. (a) Pour $n = 2$, S_2 a deux éléments : l'application identité, pour lequel le signe est toujours $+$, et la bijection τ qui échange 1 et 2, pour laquelle le signe est $-$, et l'on a bien la formule :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(b) Pour $n = 3$, S_3 a $3! = 6$ éléments : l'application identité et les deux permutations circulaires $c : 1 \to 2 \to 3 \to 1$ et $d : 1 \to 3 \to 2 \to 1$, pour lesquelles le signe est $+$, et chacune des trois permutations τ_i $(i = 1, 2, 3)$ qui laisse fixe l'élément i et échange les deux autres, pour lesquelles le signe est $-$. On obtient la formule :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + \underbrace{a_{12}a_{23}a_{31}}_{c} + \underbrace{a_{13}a_{21}a_{32}}_{d} - \underbrace{a_{11}a_{23}a_{32}}_{\tau_1} - \underbrace{a_{13}a_{22}a_{31}}_{\tau_2} - \underbrace{a_{12}a_{21}a_{33}}_{\tau_3}.$$

Théorème et définition 7.13 **(Déterminant et polynôme caractéristique d'un endomorphisme)**

(Q) *Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de V. Soit X une indéterminée.*

(i) *Soient $\mathscr{B}$ une base de V et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. On pose* $\boxed{\mathrm{d\acute{e}t}(u) = \mathrm{d\acute{e}t}(A)}$ *et l'on définit le* polynôme caractérisque *de u, noté $P_u(X)$, par $P_u(X) = \mathrm{d\acute{e}t}(A - XI_n) \in \mathbb{K}[X]$.*

(ii) *Ceci ne dépend pas de la base choisie : si $\mathscr{B}'$ est une autre base et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, on a $\mathrm{d\acute{e}t}(A' - XI_n) = \mathrm{d\acute{e}t}(A - XI_n)$ et donc aussi $\mathrm{d\acute{e}t}(A') = \mathrm{d\acute{e}t}(A)$.*

(iii) *Si v est un autre endomorphisme de V, on a :* $\boxed{(*)\ \mathrm{d\acute{e}t}(u \circ v) = \mathrm{d\acute{e}t}(u)\,\mathrm{d\acute{e}t}(v).}$

(iv) *$P_u(X)$ est un polynôme de degré n de la forme suivante :*

$$P_u(X) = (-1)^n X^n - (-1)^n \,\mathrm{Tr}(u) X^{n-1} + \cdots + \mathrm{d\acute{e}t}(u),$$

i.e. le coefficient dominant est $(-1)^n$, le terme constant est $\mathrm{d\acute{e}t}(u)$, et le coefficient de X^{n-1} est $(-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(u)$.

(v) *En particulier :* $\boxed{\text{si } n = 2 \text{ on a } P_u(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(u)X + \mathrm{d\acute{e}t}(u).}$

(vi) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a* $\boxed{P_u(\lambda) = \mathrm{d\acute{e}t}(u - \lambda\,\mathrm{id}_V).}$

Démonstration. — Prouvons (ii) et (iii). Soient $\mathscr{B}'$ une autre base de V, P la matrice de passage et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^{-1}AP$. Alors, on a l'égalité de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$: $A' - XI_n = P^{-1}(A - XI_n)P$ et comme $\mathrm{d\acute{e}t} : M_n(\mathbb{K}[X]) \to \mathbb{K}[X]$ est multiplicatif, on a :

$$\mathrm{d\acute{e}t}(A' - XI_n) = \mathrm{d\acute{e}t}(P)^{-1}\,\mathrm{d\acute{e}t}(A - XI_n)\,\mathrm{d\acute{e}t}(P) = \mathrm{d\acute{e}t}(A - XI_n).$$

Ceci montre que $P_u(X)$ est bien défini, i.e. ne dépend pas de la base choisie. Faisant $X = 0$, on obtient de même que $\mathrm{d\acute{e}t}(u)$ est bien défini. Si v est un autre endomorphisme de V, posons $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$. D'après la formule 7.5 (♠) on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u \circ v) = AB$ et donc $\mathrm{d\acute{e}t}(u \circ v) = \mathrm{d\acute{e}t}(AB) = \mathrm{d\acute{e}t}(A)\,\mathrm{d\acute{e}t}(B) = \mathrm{d\acute{e}t}(u)\,\mathrm{d\acute{e}t}(v)$. Ceci prouve (ii) et (iii).

Prouvons (iv) et (vi). Écrivons $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ et $B = A - XI_n$, alors

$$P_u(X) = \mathrm{d\acute{e}t}(B) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

D'après la forme explicite du déterminant, ceci est la somme de tous les produits de n coefficients b_{ij} de cette matrice, en n'en prenant qu'un dans chaque ligne et chaque colonne, chaque produit étant précédé d'un signe $\pm$ qui ne dépend que de la permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ choisie, et non des coefficients de la matrice. On voit ainsi que si l'on fait d'abord cette somme avec l'indéterminée X puis qu'on remplace X par $\lambda \in \mathbb{K}$, ce qui donne $P_u(\lambda)$, on trouve la même chose qu'en remplaçant X par λ dans la matrice puis en calculant le déterminant, ce qui donne $\mathrm{d\acute{e}t}(A - \lambda I_n) = \mathrm{d\acute{e}t}(u - \lambda\,\mathrm{id}_V)$. Ceci prouve (vi). En particulier, le terme constant de $P_u(X)$, obtenu pour $X = 0$, vaut $\mathrm{d\acute{e}t}(A) = \mathrm{d\acute{e}t}(u)$.

D'autre part, on voit que si un produit $b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$ contient $n - 1$ termes diagonaux, alors le dernier terme du produit est forcément, lui aussi, sur la diagonale, donc σ est l'application identique de $\{1, \dots, n\}$ qu'on notera id. En d'autres termes, pour toute permutation $\sigma \neq \mathrm{id}$, le produit $b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$ contient au plus $n - 2$ termes diagonaux. Donc, en écrivant que :

$$P_u(X) = (a_{11} - X)(a_{22} - X) \cdots (a_{nn} - X) + \sum_{\sigma \neq \mathrm{id}} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)},$$

on voit que la somme de droite donne un polynôme en X de degré $\leq n-2$, donc les termes de degré $\geq n-1$ dans $P_u(X)$ proviennent uniquement du produit des termes diagonaux. Or en développant ce produit, on voit que le terme de degré n est $(-X)^n = (-1)^n X^n$, tandis que le terme de degré $n-1$ s'obtient en prenant, pour chaque i, a_{ii} dans le i-ème facteur et $-X$ dans tous les autres, ce qui donne $(a_{11}+\cdots+a_{nn})(-X)^{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A)X^{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(u)X^{n-1}$. Ceci prouve (iv), et donc aussi (v). Le théorème est démontré. □

Notation 7.14. — Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $P_A(X) = \text{dét}(A - XI_n) \in \mathbb{K}[X]$. Si u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ défini par A (i.e. l'unique endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A), on a donc $P_u(X) = P_A(X)$.

Maintenant que l'on a défini le déterminant d'un endomorphisme, on peut énoncer la proposition suivante.

(Q) ***Proposition 7.15* (Endomorphismes inversibles).** — *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est inversible (i.e. il existe un endomorphisme v de E tel que $u\circ v = \mathrm{id}_E = v\circ u$).*
(ii) *u est injectif.*
(iii) *u est surjectif.*
(iv) $\text{dét}(u) \neq 0$.

Démonstration. — Si u est inversible, il est injectif, car si $u(x)=0$ alors $x = v(u(x)) = 0$. De plus, $u\circ v = \mathrm{id}_E$ entraîne que $\text{dét}(u)\,\text{dét}(v) = 1$, d'où $\text{dét}(u)\neq 0$. Donc (i) implique (ii) et (iv).

Si u est injectif alors, d'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(u)$ est un sev de E de dimension n, donc $\mathrm{Im}(u) = E$ et u est surjectif. Réciproquement, si u est surjectif, le théorème du rang entraîne que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. Donc : (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ u est bijectif, et dans ce cas on a vu que la bijection réciproque $v = u^{-1}$ est linéaire, d'où (i). Donc, déjà, (i), (ii) et (iii) sont équivalents et impliquent (iv).

Enfin, supposons $\text{dét}(u)\neq 0$ et soit A la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$ de E. Alors $\text{dét}(A) = \text{dét}(u) \neq 0$ donc A est inversible : il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n = BA$. D'après le corollaire 7.4 il existe un unique endomorphisme v de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = B$, et d'après le théorème 7.5 les égalités $AB = I_n = BA$ entraînent que $u\circ v = \mathrm{id}_E = v\circ u$, donc v est l'inverse de u. La proposition est démontrée. □

Définitions 7.16. — Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de V et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) λ est une *valeur propre* de u si le sous-espace vectoriel

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_V) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

est $\neq \{0\}$.

(ii) Dans ce cas, V_λ s'appelle *l'espace propre* de u associé à λ, et tout élément *non nul* de V_λ est appelé un *vecteur propre* de u pour la valeur propre λ.

(Q) ***Définition et proposition 7.17.*** — *Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de V et $\lambda\in\mathbb{K}$.*

(i) *λ est valeur propre de u $\Longleftrightarrow$ λ est racine de $P_u(X)$.*

(ii) *Dans ce cas, l'ordre m_λ de λ comme racine de $P_u(X)$, i.e. le plus grand entier $m\geq 1$ tel que $P_u(X)$ soit divisible par $(X-\lambda)^m$, s'appelle la* multiplicité algébrique *de λ, tandis que* $\dim V_\lambda$ *s'appelle la* multiplicité géométrique *de λ.*

(iii) *On a* $\boxed{\dim(V_\lambda) \leq m_\lambda.}$

Démonstration. — (i) D'après la proposition 7.15, $V_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ est non nul si et seulement si $0 = \text{dét}(u - \lambda\,\mathrm{id}_V) = P_u(\lambda)$.

(iii) Soit $(e_1,\dots,e_d)$ une base de V_λ, complétons-la en une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_d,e_{d+1},\dots,e_n)$ de V. Comme $u(e_i) = \lambda e_i$ pour $i = 1,\dots,d$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est de la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

avec $A \in M_{d,n-d}(\mathbb{K})$ et $B \in M_d(\mathbb{K})$. Soustrayant XI_n et prenant le déterminant, on obtient que $P_u(X) = (\lambda - X)^d P_B(X)$, d'où $d \leq m$. La proposition est démontrée. □

7.3. Endomorphismes diagonalisables

Définition et proposition 7.18 **(Sommes directes).** — *Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_n$ des sev de V.*

(i) *On note $E_1 + \cdots + E_n$ l'ensemble des sommes $x_1 + \cdots + x_n$, où $x_i \in E_i$. C'est un sev de V.*

(ii) *On dit que les E_i sont* en somme directe *si tout $x \in E_1 + \cdots + E_n$ s'écrit* de façon unique *sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in E_i$; ceci équivaut à dire que si $0 = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in E_i$, alors $x_i = 0$ pour tout i. Dans ce cas, la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est notée* $\boxed{E_1 \oplus \cdots \oplus E_n.}$

(iii) *Supposons chaque E_i de dimension finie d_i. Alors $\dim(E_1 + \cdots + E_n) \leq d_1 + \cdots + d_n$ et on a l'égalité si et seulement si les E_i sont en somme directe.*

Démonstration. — (i) Il est clair que l'ensemble des sommes indiquées est stable par combinaison linéaire, donc $E_1 + \cdots + E_n$ est bien un sev de V.

(ii) On a $x_1 + \cdots + x_n = x_1' + \cdots + x_n'$ si et seulement si $(x_1 - x_1') + \cdots + (x_n - x_n') = 0$, d'où l'équivalence des deux conditions.

(iii) Pour $i = 1, \ldots, n$, soit $\mathscr{B}_i = (e_1^i, \ldots, e_{d_i}^i)$ une base de E_i. Posons $E = E_1 + \cdots + E_n$. Alors tout $x \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire des e_j^i, d'où $\dim(E) \leq d_1 + \cdots + d_n$.

Supposons qu'on ait l'égalité. Alors les e_j^i forment une base de E donc sont linéairement indépendants. Si l'on a une égalité $0 = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in E_i$, on peut écrire chaque x_i sous la forme $a_{1,i}e_1^i + \cdots + a_{d_i,i}e_{d_i}^i$ et l'on obtient :

$$0 = (a_{1,1}e_1^1 + \cdots + a_{d_1,1}e_{d_1}^1) + \cdots + (a_{1,n}e_1^n + \cdots + a_{d_n,n}e_{d_n}^n)$$

et comme les e_j^i sont linéairement indépendants, tous les $a_{j,i}$ sont nuls et donc les x_i aussi. Ceci montre que si on a l'égalité, alors les E_i sont en somme directe.

Réciproquement, supposons que les E_i soient en somme directe. Supposons qu'on ait une égalité

$$0 = \underbrace{(a_{1,1}e_1^1 + \cdots + a_{d_1,1}e_{d_1}^1)}_{=x_1} + \cdots + \underbrace{(a_{1,n}e_1^n + \cdots + a_{d_n,n}e_{d_n}^n)}_{=x_n}.$$

Alors, comme la somme des E_i est directe, chaque somme $x_i = \sum_{j=1}^{d_i} a_{j,i}\, e_j^i$ est nulle, et comme la famille $\mathscr{B}_i$ est libre, ceci entraîne que $a_{j,i} = 0$ pour tout i. Ceci montre que si la somme est directe, alors les e_j^i sont linéairement indépendants, donc forment une base de E, d'où $\dim(E) = d_1 + \cdots + d_n$. La proposition est démontrée. □

Théorème 7.19. — *Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, u un endomorphisme de V et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres, deux à deux distinctes, de u. Les espaces propres $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r}$ sont en somme directe.*

Démonstration. — Montrons par récurrence sur r l'assertion : $(\star_r)$ si l'on a une égalité $x_1 + \cdots + x_r = 0$, avec $x_i \in V_{\lambda_i}$, alors $x_1 = 0 = \cdots = x_r$. C'est évident si $r = 1$, donc on peut supposer $r \geq 2$ et l'assertion établie pour $r - 1$. Supposons qu'on ait une égalité $x_1 + \cdots + x_r = 0$, avec $x_i \in V_{\lambda_i}$. En appliquant l'endomorphisme u, d'une part, et en multipliant par λ_r, d'autre part, on obtient les égalités :

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{r-1}x_{r-1} + \lambda_r x_r = 0 \\ \lambda_r x_1 + \cdots + \lambda_r x_{r-1} + \lambda_r x_r = 0 \end{cases}$$

d'où par soustraction l'égalité

$$(\lambda_1 - \lambda_r)x_1 + \cdots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)x_{r-1} = 0. \tag{†}$$

Chaque vecteur $y_i = (\lambda_i - \lambda_r)x_i$ appartient à V_{λ_i} donc, d'après l'hypothèse de récurrence $(\star_{r-1})$, l'égalité (†) entraîne $y_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, r - 1$, et comme $\lambda_i - \lambda_r \neq 0$ ceci entraîne $x_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, r - 1$. Enfin, reportant ceci dans l'égalité initiale $x_1 + \cdots + x_r = 0$, on obtient $x_r = 0$. Ceci montre que $(\star_r)$ est vérifiée, et la proposition est démontrée. □

Définition et proposition 7.20 **(Endomorphismes diagonalisables)**
Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimenson finie, u un endomorphisme de V et A sa matrice dans une base donnée $\mathscr{B}$ de V. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *Il existe une base $\mathscr{C}$ de V formée de vecteurs propres de u.*
(ii) *Il existe une base $\mathscr{C}$ de V telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ soit diagonale.*
(iii) *Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*
(iv) *Les vecteurs propres de u engendrent V.*
(v) *La somme des espaces propres de u égale V.*
(vi) *V est la somme directe des espaces propres de u.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que u est diagonalisable.

Démonstration. — Il est clair que (i), (ii) et (iii) sont équivalents et entraînent (iv) et (v). Ces derniers entraînent (vi) d'après le théorème 7.19. Enfin, si V est la somme directe des espaces propres V_{λ_i} pour $i = 1, \dots, r$, soit $\mathscr{C}_i$ une base de V_{λ_i}, alors la réunion des $\mathscr{C}_i$ est une base $\mathscr{C}$ de V et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ est diagonale. □

Définition 7.21. — Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *diagonalisable* si l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ défini par A l'est. D'après la définition précédente, ceci équivaut à dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Définition 7.22. — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. On dit que P est *scindé* dans $\mathbb{K}[X]$ s'il se décompose dans $\mathbb{K}[X]$ en produit de polynômes de degré 1, c.-à-d., s'il existe $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{K}$, deux à deux distincts, et des entiers $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ tels que $P = u(X - t_1)^{m_1} \cdots (X - t_r)^{m_r}$ où u est le coefficient dominant de P. On a alors $m_1 + \cdots + m_r = \deg(P) = n$.

De façon équivalente, on peut dire que P est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ s'il possède $n = \deg(P)$ racines dans $\mathbb{K}$ « comptées avec multiplicités ». Noter que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant est scindé.

(Q) ***Théorème 7.23.*** — *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Un endomorphisme u de V est diagonalisable si et seulement si la condition suivante est vérifiée : $(\star)$ $P_u(X)$ est scindé et, écrivant $P_u(X) = (-1)^n(X - t_1)^{m_1} \cdots (X - t_r)^{m_r}$ avec les t_i deux à deux distincts, on a $\dim V_{t_i} = m_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$.*

Démonstration. — Supposons u diagonalisable. Alors il existe une base $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de V telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$ soit diagonale, de termes diagonaux $\mu_1, \dots, \mu_n$ (pas nécessairement distincts). Notons $t_1, \dots, t_r$ les termes diagonaux distincts, chacun apparaissant m_i fois. Alors on a :

$$P_u(X) = \mathrm{d\acute{e}t}(D - XI_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i) = (-1)^n (X - t_1)^{m_1} \cdots (X - t_r)^{m_r}.$$

Ceci prouve déjà que $P_u(X)$ est scindé. De plus, chaque espace propre V_{t_i} contient m_i vecteurs de la base $\mathscr{C}$ donc est de dimension $\geq m_i$. Or on a vu dans la proposition 7.17 que $\dim(V_{t_i}) \leq m_i$. On a donc $\dim(V_{t_i}) = m_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$, donc la condition $(\star)$ est vérifiée.

Réciproquement supposons $(\star)$ vérifiée. Comme les espaces propres sont en somme directe, alors le sous-espace $E = V_{t_1} \oplus \cdots \oplus V_{t_n}$ est de dimension égale à : $m_1 + \cdots + m_r = \deg(P_u(X)) = n = \dim(V)$, d'où $E = V$. Donc u est diagonalisable, d'après la proposition 7.20. Le théorème est démontré. □

Corollaire 7.24. — *Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de V. Si $P_u(X)$ a n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ alors u est diagonalisable et chaque espace propre est de dimension* 1.

Démonstration. — Supposons $P_u(X) = (-1)^n(X - t_1) \cdots (X - t_n)$ avec les t_i deux à deux distincts. Alors chaque t_i est une valeur propre de multiplicité algébrique $m_i = 1$, donc V_{t_i} est de dimension ≥ 1 (car non nul) et $\leq m_i = 1$, d'où $\dim(V_{t_i}) = 1 = m_i$. Donc u est diagonalisable et chaque espace propre est de dimension 1. □