MIPI 23 Applications linéaires et matrices

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués $(**)$ peuvent être considérés comme des « compléments de cours ». Les évaluations ne comporteront pas d'exercices de ce type.

Exercice 1. $(*)$ Soit $u : E \to F$ une application linéaire, où $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$, et soit $r = \operatorname{rang}(u)$.

1. Montrer qu'il existe des bases $\mathcal{C}$ de F et $\mathcal{B}$ de E telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, où I_r désigne la matrice identité de taille r. Indication : compléter une base $(f_1, \dots, f_r)$ de $\operatorname{Im}(u)$ en une base $\mathcal{C}$ de F, choisir $e_1, \dots, e_r$ dans E tels que $u(e_i) = f_i$ et montrer que $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r) + \operatorname{Ker}(u) = E$.
2. Soit $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $Q^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, où $r = \operatorname{rang}(A)$.
3. $(*)$ Réciproquement, s'il existe $s \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $Q^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, montrer que $s = \operatorname{rang}(A)$.
4. Déduire de la question précédente une autre démonstration du fait que $\operatorname{rang}({}^tA) = \operatorname{rang}(A)$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère deux vecteurs linéairement indépendants $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Soit π (resp. σ) la projection sur la droite $D_1 = \mathbb{R}u_1$ (resp. la symétrie par rapport à D_1) *parallèlement à la droite* $D_2 = \mathbb{R}u_2$, c.-à.-d., pour tout vecteur $v = x_1u_1 + x_2u_2$, on a : $\boxed{\pi(v) = x_1u_1}$ et $\boxed{\sigma(v) = x_1u_1 - x_2u_2.}$

1. Écrire la matrice R de π (resp. S de σ) dans la base $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$.
2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
3. Soit A (resp. B) la matrice de π (resp. σ) dans la base $\mathcal{B}$. Écrire les formules exprimant A et B en fonction de R, S et P, puis calculer explicitement A et B.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire standard : $(x \mid y) = x_1y_1 + x_2y_2$ si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique. Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul et D la droite $\mathbb{R}u$.

1. Donner un générateur v de la droite $D^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x \mid u) = 0\}$.

Soient π la projection orthogonale sur D et σ la symétrie orthogonale par rapport à D, définies pour tout vecteur $x = x_1u + x_2v$, par $\boxed{\pi(x) = x_1u}$ et $\boxed{\sigma(x) = x_1u - x_2v.}$

2. Écrire les matrices R et S de π et σ dans la base $\mathcal{C} = (u, v)$.
3. En utilisant l'exercice précédent, déterminer les matrices A et B de π et σ dans la base $\mathcal{B}$.
4. On note π' la projection orthogonale sur $D^\perp$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\pi'(x) = \dfrac{(x \mid v)}{(v \mid v)}v$. Indication : écrire $\pi'(x) = \lambda v$ puis calculer $(x \mid v)$.
5. En utilisant la question précédente, exprimer $\pi(x)$ et $\sigma(x)$ en fonction de x et v.
6. En utilisant la question précédente, calculer $\pi(e_i)$ et $\sigma(e_i)$ pour $i = 1, 2$. Comparer avec le résultat obtenu à la question 3.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire standard : $(x \mid y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul, D la droite $\mathbb{R}v$ et P le plan orthogonal à D, i.e. $P = D^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x \mid v) = 0\}$. On note π_D (resp. π_P) la projection orthogonale sur D (resp. sur P) et σ_P la symétrie orthogonale par rapport à P définies comme suit : pour tout $x = u + tv$, avec $u \in P$ et $t \in \mathbb{R}$, on a : $\pi_D(x) = tv$, $\pi_P(x) = u$ et $\sigma_P(x) = u - tv$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, montrer que $\pi_D(x) = \dfrac{(x \mid v)}{(v \mid v)} v$. Indication : écrire $\pi_D(x) = tv$ et calculer $(x \mid v)$.
2. En utilisant la question précédente, exprimer $\pi_P(x)$ et $\sigma_P(x)$ en fonction de x et v.
3. Calculer $\pi_D(e_i)$ et $\sigma_P(e_i)$ pour $i = 1, 2, 3$, puis écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de π_P et de σ_P.
4. La symétrie orthogonale τ par rapport à la droite D, définie par $\tau(u + tv) = tv - u$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $u \in P$, est appelée le *demi-tour* d'axe D. Comme dans les questions précédentes, exprimer $\tau(x)$ en fonction de x et v, puis écrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de τ.

Exercice 5. 1) Pour chacune des matrices suivantes, à coefficients dans $\mathbb{R}$ (pour B, on a $t \in \mathbb{R}$) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} t+1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calculez le polynôme caractéristique puis déterminez si la matrice est diagonalisable ou non.

2) Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la matrice $G_t = \begin{pmatrix} -1 & t \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? Pour lesquelles est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$? Indication : calculer le polynôme caractéristique $P_t(X)$ de G_t et étudier ses racines selon la valeur de t.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de A et déterminer ses racines.

2) Peut-on dire si A est diagonalisable ? Justifier votre réponse.

Exercice 7. Soit $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1) Calculer le polynôme caractéristique $P_B(X)$ et déterminer ses racines et leur multiplicité.

2) Compte tenu du résultat obtenu en 1), quel calcul faut-il faire pour savoir si B est diagonalisable ?

3) Effectuer ce calcul, et déterminer si B est diagonalisable ou non.