MIPI 23 Réduction des endomorphismes. Applications

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations.

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne un corps.

Exercice 1 (Matrice compagnon pour $n = 2$). Soit $P = T^2 - aT - b \in \mathbb{K}[T]$ et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(T) = \text{dét}(A - TI_2)$. (La matrice A est appelée la *matrice compagnon* de P.)
2. Soit α une racine de P dans $\mathbb{K}$. Déterminer l'espace propre $V_\alpha = \{X \in \mathbb{K}^2 \mid AX = \alpha X\}$ et donner un vecteur $v_\alpha \in V_\alpha$ de la forme $v_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$.
3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si P a dans $\mathbb{K}$ deux racines distinctes α et β. Donner dans ce cas une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^2$ formée de vecteurs propres comme à la question précédente.
4. Écrire la matrice de passage $Q = \text{Mat}_\mathcal{B}(\mathcal{C})$, où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^2$, puis calculer Q^{-1} et $D = Q^{-1}AQ$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^n en fonction de Q et D^n, puis calculer explicitement A^n.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Calculez le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
2. Expliquez, sans calcul, pourquoi A est diagonalisable.
3. Déterminez une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ de vecteurs propres, telle que la 1ère coordonnée de v_1 et de v_2 soit égale à 1.
4. Écrivez la matrice de passage $P = \text{Mat}_\mathcal{B}(\mathcal{C})$ et calculez P^{-1} ainsi que $D = P^{-1}AP$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^n en fonction de P et D^n, puis calculer explicitement A^n.

On considère la suite vectorielle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer U_n en fonction de A et U_0 puis calculer explicitement U_n.

Exercice 3 (Matrices stochastiques pour $n = 2$). Soit $A = \begin{pmatrix} 1-b & c \\ b & 1-c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, où b et c sont dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$ (de sorte que $1 - b$ et $1 - c$ y sont aussi). (Une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle est à coefficients ≥ 0 et si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. La matrice A est donc la transposée d'une matrice stochastique.)

1. Montrer que 1 est valeur propre de A. Déterminer l'espace propre associé $V_1 = \text{Ker}(A - I_2)$ et en donner un générateur $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $x + y = 1$.
2. Montrer que $\alpha = 1 - b - c$ est valeur propre de A. Déterminer l'espace propre associé $V_\alpha = \text{Ker}(A - \alpha I_2)$ et en donner un générateur v_2 de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$, avec $z \in \mathbb{R}$.
3. On pose $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$. Écrire la matrice de passage $P = \text{Mat}_\mathcal{B}(\mathcal{C})$, où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et calculer P^{-1}. Puis déterminer sans calcul $D = P^{-1}AP$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^n en fonction de P et de D^n, puis calculer explicitement A^n en fonction de b, c et α^n.
5. Montrer que $|\alpha| < 1$.
6. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0 + y_0 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ le vecteur A^nU_0. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ (i.e. déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$).

Exercice 4. $(*)$(Matrices compagnons) Soient n un entier ≥ 2 et $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

(à part la dernière ligne, les seuls coefficients non nuls sont ceux juste au-dessus de la diagonale, qui valent 1).

1. Écrire la matrice $A - XI_n$. En ajoutant à la première colonne des multiples appropriés des autres colonnes, puis en développant par rapport à la 1ère colonne, montrer que le polynôme caractéristique $P_A(X)$ égale $(-1)^n P$.
2. On suppose que $\mu \in \mathbb{K}$ est une racine de P. En résolvant le système $AX = \mu X$ (ou en remplaçant dans le calcul précédent X par μ), montrer que l'espace propre $V_\mu = \mathrm{Ker}(A - \mu I_n)$ est de dimension 1 et en donner un générateur.
3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si P a n racines distinctes $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans $\mathbb{K}$.
4. Si tel est le cas, donner une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}AQ$ soit la matrice diagonale $D(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ de termes diagonaux $\mu_1, \ldots, \mu_n$. (En d'autres termes : si u désigne l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A, donner une base $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{K}^n$ où chaque v_i est un vecteur propre pour μ_i, puis écrire la matrice $Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.)

Exercice 5. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. On cherche les fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ de classe C^∞ vérifiant l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, notant $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ on ait :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $Y(t)$ le vecteur des coordonnées de $X(t)$ dans la base $\mathcal{C}$.

1. Exprimer $X(t)$ en fonction de P et $Y(t)$.
2. En écrivant $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et en calculant $P^{-1}X(t)$, montrer que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
3. Montrer que l'on a $Y'(t) = DY(t)$ pour une matrice D que l'on déterminera. En déduire l'expression de $Y(t)$ en fonction de $Y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$.
4. En déduire l'expression de $X(t)$ en fonction de $X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$.

Exercice 6. $(*)$ Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$. On suppose que A possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ mais que A n'est *pas* diagonalisable. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ défini par A, et id l'application identique de $\mathbb{K}^2$.

1. Montrer que $P_A(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$ pour un certain $\mu \in \mathbb{K}$, puis que $\mu = \lambda$.
2. Montrer que le sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Im}(u - \lambda\mathrm{id})$ de $\mathbb{K}^2$ est stable par u. Quelle est sa dimension ?
3. En utilisant que u n'est pas diagonalisable, montrer que E égale $V_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})$.
4. Soit $v_2 \in \mathbb{K}^2$ tel que $v_2 \notin V_\lambda$. On pose $v_1 = u(v_2) - \lambda v_2$. Montrer que $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ est une famille libre, donc une base de $\mathbb{K}^2$, puis écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.