MIPI 23 Intégrales, sommes de Riemann, méthode du point milieu

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués $(**)$ peuvent être considérés comme des « compléments de cours ». Les évaluations ne comporteront pas d'exercices de ce type.

Exercice 1 (Décomposition en éléments simples)**.** Décomposer les fractions rationnelles ci-dessous en éléments simples, puis en donner une primitive et calculer l'intégrale indiquée.

1. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^3}$. Calculer $I = \displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)dt$.
2. Soit $f :]0, 2[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{t+1}{t^3-4t}$. Calculer $J = \displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)dt$.
3. Soit $f :]2, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{t^2-t-1}{(t-1)(t-2)^2}$. Calculer $K = \displaystyle\int_{3}^{4} f(t)dt$.
4. Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{2t^2-1}{(t+1)^3}$. Calculer $L = \displaystyle\int_{0}^{2} f(t)dt$.
5. Soit $f :]2, +\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{t^2-t-1}{(t-2)(t^2+t+3)}$. Calculer $M = \displaystyle\int_{3}^{4} f(t)dt$.

Exercice 2 (Sommes de Riemann)**.** Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites ci-dessous :

1. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+3n^2}$
2. $b_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \Big(1+\frac{k}{n}\Big)^{1/n}$
3. $c_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k})$, où E est la fonction « partie entière ».
4. $d_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\Big(\frac{k\pi}{3n}\Big)\cos\Big(\frac{k\pi}{3n}\Big)$.

Exercice 3 (Sommes de Riemann, encore)**.** $(**)$ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big).$$

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n^s)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n^s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$

1. Tracer approximativement le graphe de la fonction $f_s : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^s}$ lorsque $s = 1$, en prenant 1 cm comme unité de longueur.
2. On utilisant le graphe précédent, montrer que $u_{n+1}^s - 1 \leq \displaystyle\int_1^{n+1} f_s(x)dx \leq u_n^s$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^{n+1} f_s(x)dx$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n^s = +\infty$ si $s \leq 1$.
4. Monter que si $s > 1$, la suite $(u_n^s)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
5. Montrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.
6. En déduire que les suites a et b définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $b_n = u_n^1 - \ln(n)$ et $a_n = b_n - \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes. (Indication : calculer $b_n - b_{n-1}$ pour $n \geq 2$ et $a_{n+1} - a_n$ pour $n \geq 1$.) On note γ leur limite commune.

7. Montrer que $1 - \ln(2) < \gamma < 1$. (Remarque : γ est appelée la *constante d'Euler*, elle vaut approximativement 0,577215.)

Exercice 5 (Méthode du point milieu). (∗) Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On pose $M_2 = \|f''\| = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. On fixe $c < d$ dans $[a,b]$ et l'on note $m = (c+d)/2$ le milieu de $[c,d]$.

1. Montrer que $|f(x) - f(m) - (x-m)f'(m)| \leq M_2 \dfrac{x-m)^2}{2}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_c^d (x-m)dx = 0$ et que $\displaystyle\int_c^d (x-m)^2 = \frac{(d-c)^3}{12}$.
3. Montrer que $\Big| \displaystyle\int_c^d f(x)dx - (d-c)f(m) \Big| \leq M_2 \frac{(d-c)^3}{24}$.
4. Soit n un entier ≥ 2. On subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n parties égales, en posant $h = (b-a)/n$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, \ldots, n$. En appliquant la question précédente à chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, dont on note m_i le milieu, montrer que
$$\Big| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(m_i) \Big| \leq n M_2 \frac{h^3}{24} = M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$
5. On prend $a = 0$ et $b = 1/2$ et $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(\cos(t)$. Calculer $f'(x), f''(x)$ et M_2. Déterminez le plus petit n tel que $M_2(b-a)^3/24n^2$ soit $< 10^{-3}$ puis utilisez votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée à $\pm 10^{-3}$ près de $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln(\cos(t))dt$.
6. Même question pour $a = 0$ et $b = 1/2$ et $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(t^2)$.

Exercice 6. Soit $P = a + bx + cx^2 + dx^3$ un polynôme de degré 3.

1. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)dt = \frac{1}{3}\Big(P(-1) + P(1) + 4P(0)\Big)$.
2. Pour tout $a < b$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\int_a^b P(u)du = \frac{b-a}{6}\Big(P(a) + P(b) + 4P(\frac{a+b}{2})\Big)$. Indication : faire le changement de variable affine qui envoie -1 sur a et 1 sur b

Exercice 7 (∗). Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables, avec f *positive et décroissante*. Comme f est monotone, elle admet une limite à droite en a, notée $f(a^+)$. (Comme f est décroissante, $f(a^+)$ est la borne supérieure des $f(x)$, pour $x \in]a,b]$, et ceci est $\leq f(a)$, avec égalité si et seulement si f est continue à droite en a.)

1. Montrer que la fonction $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x g$ est continue. En déduire que $G([a,b])$ est un intervalle $[m, M]$.
2. On suppose f en escalier sur la subdivison $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ et l'on note f_i sa valeur sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. Exprimer $\displaystyle\int_a^b fg$ en fonction des f_i et des $G(x_i)$, puis montrer que $mf_1 \leq \displaystyle\int_a^b fg \leq Mf_1$ et en déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b fg = f(a^+) \int_a^c g$.
3. (∗∗) Pour f intégrable, *positive et décroissante* mais pas nécessairement en escalier, montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b fg = f(a^+) \int_a^c g$ (2ème formule de la moyenne).