MIPI 23 Matrices, systèmes linéaires, déterminants

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués $(**)$ peuvent être considérés comme des « compléments de cours ». Les évaluations ne comporteront pas d'exercices de ce type.

Exercice 1. Dans $M_3(\mathbb{R})$ soient $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA. A-t-on $AB = BA$ en général ?
2. $(**)$ Posant $a = x_1, b = x_2, c = x_3, \ldots, i = x_9$, écrire la matrice du système homogène 9×9 donné par l'égalité $AB = BA$. On ne cherchera pas à résoudre ce système. On verra plus tard (peut-être) que pour la matrice B donnée, l'espace des solutions est de dimension 3, et que le sous-espace correspondant de $M_3(\mathbb{R})$ admet pour base (I_3, B, B^2).

Exercice 2. Dans $M_{3,4}(\mathbb{R})$ soient $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice ${}^tA$ puis calculer $B\,{}^tA$.

Exercice 3 (*)**.** On se place dans $M_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la définition des matrices élémentaires E_{ij}.
2. En utilisant la formule pour le produit matriciel, déterminer le produit $E_{ij}E_{k\ell}$.

Exercice 4. Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire : $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = b_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = b_3 \end{cases}$

1. Écrire la matrice A du système, puis la matrice augmentée.
2. En faisant des opérations sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer en fonction de b l'ensemble des solutions.
3. Quel est le rang de A ? Et l'image de A ?

Exercice 5. Soient $\mathbb{K}$ un corps, $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,r}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. (Calculer le terme d'indice (i, j) de chaque matrice.)
2. Pour tout i, j, calculer $(A\,{}^tA)_{ij}$. En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A\,{}^tA = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Calculer $\text{dét}(A)$ en faisant des opérations sur les lignes ou colonnes de A.

Exercice 7. On se place dans $M_n(\mathbb{R})$ et l'on considère la matrice suivante, disons pour $n = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. En faisant des opérations sur les lignes du couple $(A \mid I_4)$, déterminer si A est inversible et si oui, calculer son inverse.
2. Écrire la matrice $A + I_4$ et calculer son carré.
3. $(*)$ En utilisant que $(A + I_4)(A + I_4) = A^2 + 2A + I_4$, déduire de la question précédente une égalité $A(A + aI_4) = bI_4$ pour des réels a, b qu'on déterminera. Comparer avec le résultat de la question 1.
4. $(*)$ Mêmes questions pour n arbitraire, $A \in M_n(\mathbb{R})$ étant la matrice dont tous les coefficients valent 1 sauf ceux sur la diagonale qui sont nuls.

Exercice 8 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, on considère le déterminant :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule : $\boxed{V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).}$

1. Expliquer pourquoi la formule est vraie si deux des a_i sont égaux.
2. Vérifier le résultat pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. En faisant des opérations bien choisies sur les lignes, puis en développant par rapport à la première colonne, montrer que

   (†) $$V(a_1, \ldots, a_n) = V(a_2, \ldots, a_n) \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1).$$

4. Conclure alors par récurrence.
5. $(*)$ Autre méthode pour (†). D'après la question 1, on peut supposer les a_i deux à deux distincts. Soit X une indéterminée. En développant par rapport à la 1ère colonne, montrer que $V(X, a_2, \ldots, a_n)$ est un polynôme en X de degré $\leq n-1$ et calculer son coefficient dominant. Déterminer $(n-1)$ racines « évidentes » et retrouver ainsi la formule (†).

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ soit inversible.

Exercice 10. Soient X une indéterminée et $A = \begin{pmatrix} 2-X & -3 & -6 \\ 0 & 5-X & 6 \\ -1 & -5 & -5-X \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}[X])$. Calculer le polynôme $P = \text{dét}(A) \in \mathbb{R}[X]$ et déterminer ses racines.

Exercice 11. Idem pour la matrice $B = \begin{pmatrix} -2-X & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4-X & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1-X & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -X \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}[X])$.