MIPI 23 Systèmes linéaires, déterminants, calcul de A^{-1}, suites

Les exercices sans $(*)$ sont des applications directes du cours. Les exercices marqués $(*)$ sont un peu plus difficiles, mais quelques exercices de ce genre pourront aussi figurer dans les évaluations. Enfin, quelques exercices marqués $(**)$ peuvent être considérés comme des « compléments de cours ». Les évaluations ne comporteront pas d'exercices de ce type.

Exercice 1. On considère le système linéaire suivant, à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & & -x_4 & = b_1 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = b_2 \\ & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = b_3 \\ -x_1 & & -x_3 & +2x_4 & = b_4 \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A du système, puis la matrice augmentée.
2. En faisant des opérations sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer $\operatorname{rang}(A)$ et une ou des équation(s) de $\operatorname{Im}(A)$, puis préciser les variables libres (s'il y en a) et donner des équations de $\operatorname{Ker}(A)$.
3. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}(A)$? En déterminer une base.
4. Résoudre le système lorsque $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = -3$ et $b_4 = 0$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. En faisant des opérations sur les lignes du couple $(A \mid I_4)$, déterminer si A est inversible.
2. Si oui, donnez la valeur de $\operatorname{dét}(A)$ et calculez A^{-1}.
3. Mêmes questions pour $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.
4. Mêmes questions pour $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe non bornée. Montrer qu'on peut en extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite réelle $(|u_{n_k}|)_{k\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$.

Exercice 4. Soit u la suite réelle définie par $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = -1/2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 1/3$, $u_7 = \cdots = u_{10} = -1/4$, $u_{11} = \cdots = u_{15} = 1/5$, etc. et soit S la suite définie par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1. La suite S est-elle bornée ?
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(S_{n+1} - S_n)$.
3. Extraire de S une sous-suite qui converge vers 1, resp. 0.
4. La suite S est-elle convergente ?
5. La suite S est-elle de Cauchy ?