1M002
Suites et intégrales, Algèbre linéaire

Sylvie Guerre-Delabrière
Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie

Avant-propos

Ce texte est un plan détaillé du cours de mathématique de L1 du deuxième semestre, destiné aux étudiants de mathématiques, informatique, physique et ingénierie. Ce cours présente les notions indispensables d'analyse et d'algèbre pour continuer des études de mathématiques. Ces étudiants auront suivi un cours de style "calculus" au premier semestre.

Ce texte détermine donc un socle commun de connaissances pour tous ces étudiants. Les exemples, les développements et les démonstrations sont laissés à l'appréciation de chaque enseignant. Les chapitres peuvent facilement être intervertis.

Les étudiants auront accès à ce texte qui sera placé sur le site de la licence. Pour qu'ils apprennent à travailler, il serait souhaitable qu'ils l'impriment, l'apportent en cours et le complètent à la main par les ajouts de leur enseignant.

Le texte source en LateX est à la disposition des enseignants qui veulent l'utiliser comme base de leur propre polycopié. A la fin du semestre, je demanderai à chaque enseignant de me faire des remarques et suggestions pour améliorer ce texte et, éventuellement, en faire un polycopié plus complet.

Ce plan détaillé servira de texte de référence pour les enseignants qui se succéderont en L1 à l'UPMC, en permettant une certaine liberté à chacun tout en fixant les notions de base à faire acquérir aux étudiants.

Paris, le 10 janvier 2014

S. D.

Table des matières

1 Quelques éléments de logique **1**

1.1 Lettres grecques et symboles mathématiques 1
1.2 Implications [$A \Rightarrow B$] et équivalences [$A \iff B$] 1
1.3 Intersection et réunion 2
1.4 Quantificateurs 3
1.5 Ordre des quantificateurs 4
1.6 Négation 4
1.7 Raisonnement par récurrence 5
1.8 Bornes supérieures et bornes inférieures dans $\mathbb{R}$. 5

2 Suites numériques **7**

2.1 Définition et premières propriétés 7
2.2 Suites de nombres réels 8
2.3 Suites adjacentes, critère de Cauchy 9
2.4 Sous-suites 9
2.5 Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ 10

3 Suites numériques récurrentes **11**

3.1 Définition 11
3.2 Monotonie 11
3.3 Points fixes 11
3.4 Représentations graphiques 12
3.5 Applications 12

4 Intégrale de Riemann **15**

4.1 Intégrales des fonctions en escalier 15
4.2 Fonctions intégrables, intégrale de Riemann 17
4.3 Intégration d'un produit de fonctions 19

5 Approximation des intégrales **21**

5.1 Méthode des rectangles 21
5.2 Méthode des trapèzes 22

6 Calcul des intégrales **25**

6.1 Primitives 25
6.2 Calcul des primitives 26

7 Matrices **27**
7.1 Matrices 2×2 27
7.2 Matrices 3×3 28
7.3 Matrices $m \times n$ 29

8 Déterminants, inversion des matrices carrées **31**
8.1 Déterminants des matrices carrées 31
8.2 Matrices inversibles 32

9 Espaces vectoriels de dimension finie **33**
9.1 $\mathbb{R}$-espaces vectoriels 33
9.2 Sous-espaces vectoriels 34
9.3 Bases d'un espace vectoriel de dimension finie 34
9.4 Application aux équations différentielles linéaires 35

10 Applications linéaires **37**
10.1 Applications linéaires 37
10.2 Matrice d'une application linéaire 38

11 Systèmes linéaires **39**
11.1 Cas général 39
11.2 Systèmes de Cramer 40
11.3 Réduction des sytèmes linéaires 40

12 Diagonalisation **41**
12.1 Changement de base 41
12.2 Réduction des matrices carrées 41

Chapitre 1

Quelques éléments de logique

1.1 Lettres grecques et symboles mathématiques

α alpha	κ kappa	τ tau	Λ Lambda	$\forall$ Pour tout
β beta	λ lambda	υ upsilon	Ξ Xi	$\exists$ Il existe
γ gamma	μ mu	φ phi	Π Pi	$\Rightarrow$ Implique
δ delta	ν nu	χ chi	Σ Sigma	$\iff$ Equivalent
ε epsilon	ξ xi	ψ psi	Υ Upsilon	$\cap$ Intersection
ζ zeta	o omicron	ω omega	Φ Phi	$\cup$ Réunion
η eta	π pi	Γ Gamma	Ψ Psi	ϕ vide
θ theta	ρ rho	Δ Delta	Ω Omega	$\in$ appartient
ι iota	σ sigma	Θ Theta		$\subset$ est inclus

1.2 Implications $[A \Rightarrow B]$ et équivalences $[A \iff B]$

Dans ce paragraphe, les symboles A et B désignent des propositions logiques, c'est-à-dire des objets mathématiques exprimés à l'aide d'assemblages de signes : quantificateurs, égalité, fonctions, ...

A toute propriété logique A, on peut attribuer une valeur de vérité : A peut être vraie ou fausse.
La démarche du mathématicien consiste, par application de règles logiques, à déterminer, à partir d'axiomes précisés, si une proposition est vraie ou fausse.

1.2.1 Définition. *Implication.*
La proposition $[A \Rightarrow B]$ veut dire : si la propriété A est vraie, alors la propriété B l'est aussi.

En revanche, si la propriété A n'est pas vraie, on ne peut rien dire de la propriété B.

1.2.2 Exemple. $a = 1 \Rightarrow a^2 = 1$.

Cette proprosition s'exprime en disant que la propriété A implique la propriété B. La propriété A s'appelle *l'hypothèse* et la propriété B s'appelle *la conclusion*.
Le raisonnement logique qui permet de passer de l'hypothèse A à la conclusion B s'appelle *la démonstration*.

Un énoncé logiquement équivalent à la proposition $[A \Rightarrow B]$ est $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$:
lorsque l'on veut démontrer $[A \Rightarrow B]$, on peut procéder *par contraposée* et démontrer $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$.

1.2.3 Exemple. *La propriété de l'exemple 1.2.2 s'exprime par contraposée en :*

$$a^2 \neq 1 \Rightarrow a \neq 1.$$

Une autre façon de démontrer la proposition $[A \Rightarrow B]$ est de procéder par *l'absurde*, c'est-à-dire de supposer que les propriétés A et non B sont vraies toutes les deux et d'en déduire une *contradiction*.

1.2.4 Exemple. *La propriété de l'exemple 1.2.2 s'exprime par l'absurde en :*

$$a = 1 \text{ et } a^2 \neq 1 \text{ est une contradiction.}$$

1.2.5 Définition. *Equivalence.*
La proposition $[A \iff B]$ veut dire que les propriétés A et B sont vraies en même temps et donc aussi fausses en même temps, c'est-à-dire : si la propriété A est vraie, alors la propriété B l'est aussi, c'est-à-dire $[A \Rightarrow B]$ et si la propriété B est vraie, alors la propriété A l'est aussi, c'est-à-dire $[B \Rightarrow A]$.
Cette proprosition s'exprime en disant que la propriété A est équivalente à la propriété B.

Comme précédemment, un énoncé logiquement équivalent à la proposition $[A \iff B]$ est $[\text{non } A \iff \text{non } B]$. Lorsque l'on veut démontrer $[A \iff B]$, on peut procéder *par contraposée* et démontrer $[\text{non } A \iff \text{non } B]$.

1.2.6 Exemple. *Dans $\mathbb{R}$, la propriété $a^2 = 1$ n'est pas équivalente à la propriété $a = 1$.*

En effet, le réel $a = -1$ est tel que $a^2 = 1$ et $a \neq 1$.
Donc $[a = 1 \Rightarrow a^2 = 1]$ et $[a^2 = 1 \not\Rightarrow a = 1]$.

Des panachages entre les démonstrations directes et les démonstrations par contraposée sont possibles mais dangereux : il faut s'assurer qu'on ne démontre pas deux fois le même sens !

1.2.7 Exemple. *Pour démontrer que* $[A \iff B]$*, on peut démontrer au choix :*
ou bien $[A \Rightarrow B\ ]$ *et* $[B \Rightarrow A]$
ou bien $[A \Rightarrow B]$ *et* $[\text{non } A \Rightarrow \text{non } B]$
ou bien $[B \Rightarrow A]$ *et* $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$
ou bien $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$ *et* $[\text{non } A \Rightarrow \text{non } B]$.

1.3 Intersection et réunion

Dans ce paragraphe, P et Q désignent des ensembles ou des sous-ensembles d'un ensemble plus grand.

La proposition $x \in P \cap Q$ veut dire que x appartient à la fois à P et à Q, c'est-à-dire :

$$x \in P \text{ et } x \in Q.$$

$P \cap Q$ s'appelle *l'intersection* de P et Q.

La proposition $x \in P \cup Q$ veut dire que x appartient à P ou à Q, c'est-à-dire

$$x \in P \text{ ou } x \in Q.$$

$P \cup Q$ s'appelle *la réunion* de P et Q.
On notera que le *ou* ici n'est pas exclusif : si P et Q ont une partie commune, x peut être dans cette partie-là.

Si P et Q sont des sous-ensembles d'un ensemble plus grand, désignons par P^c et Q^c les complémentaires de P et Q. La négation de la propriété $x \in P \cap Q$ s'exprime par $x \in P^c \cup Q^c$ et la négation de $x \in P \cup Q$ par $x \in P^c \cap Q^c$. En d'autres termes, la négation de *et* est *ou* et celle de *ou* est *et*.

La proposition $x \in P \setminus Q$ veut dire que x appartient à P et n'appartient pas a Q.

La proposition $x \in P \Delta Q$ veut dire que x appartient à P et n'appartient pas à Q ou l'inverse, x appartient à Q et n'appartient pas à P, c'est-à-dire $x \in (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$ ou encore : $x \in P \cup Q$ et $x \notin P \cap Q$. $P \Delta Q$ s'appelle *la différence symétrique* de P et Q.
Ici, le *ou* est exclusif : l'élément x ne peut pas être pris dans l'intersection de P et Q.

1.4 Quantificateurs

Les quantificateurs servent à exprimer des propositions. Le quantificateur $\forall$ se lit *pour tout* et le quantificateur $\exists$ se lit *il existe*.

1.4.1 Exemple. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 1$.

Cette proposition est vraie : le nombre réel $x = 1$ convient.

1.4.2 Exemple. $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ |x| = \pm x$.

Cette proposition est vraie : si le nombre réel x est positif, il est égal à sa valeur absolue, s'il est négatif il est égal à l'opposé de sa valeur absolue et s'il est nul, il est égal à la fois à sa valeur absolue et à l'opposé de sa valeur absolue.

Une proposition exprimée avec des quantificateurs peut être vraie ou fausse selon le cadre dans lequel on se place. Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit d'exhiber un *contre-exemple*, c'est-à-dire un exemple qui nie la proposition en question.

1.4.3 Exemple. $\forall z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = \pm z$.

Cette proposition est fausse, on peut trouver un nombre complexe qui ne la vérifie pas : en effet le nombre complexe $z = 1 + i$ est tel que $|z| = \sqrt{2} \neq \pm(1 + i)$.

Il faut donc préciser le domaine où l'on travaille.

1.5 Ordre des quantificateurs

Une proposition peut s'exprimer à l'aide de plusieurs quantificateurs. Dans ce cas, l'ordre dans lequel ils sont écrits est primordial, le sens de la proposition peut être radicalement modifié si l'on intervertit certains quantificateurs.

1.5.1 Exemple. *i) Continuité de f sur $\mathbb{R}$:*

$$\forall t_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\ , \ |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon.$$

ii) Continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (t, t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \left|t - t'\right| \leq \alpha \ , \ \left|f(t) - f(t')\right| \leq \varepsilon.$$

Dans l'assertion *i)*, le nombre α dépend de t_0 : si l'on change le point t_0 en lequel on étudie la continuité de f, ce nombre peut être modifié.

Dans l'assertion *ii)*, le nombre α ne dépend pas du point t : le même α convient pour tous les points t en lesquels on étudie la continuité de f.

Evidemment, on peut remarquer que la proposition *ii)* implique la proposition *i)* mais que l'inverse est faux.
Ces deux propositions ne sont donc pas équivalentes.

La règle pour ne pas modifier le sens d'une propriété comprenant plusieurs quantificateurs est la suivante : on ne peut pas intervertir deux quantificateurs consécutif distincts ; en revanche, deux quantificateurs consécutifs de même nature sont indiscernables donc leur ordre d'apparition n'a pas d'importance.

Il existe une notation différente, qui est équivalente à celle des propriétés *i)* et *ii)*, mais où le *dernier* quantificateur $\forall$ est omis :

1.5.2 Exemple. *i) Continuité de f sur $\mathbb{R}$:*

$$\forall t_0 \in \mathbb{R} \ , \ \forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |t - t_0| \leq \alpha \ \Rightarrow \ |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon.$$

ii) Continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \left|t - t'\right| \leq \alpha \Rightarrow \ \left|f(t) - f(t')\right| \leq \varepsilon.$$

1.6 Négation

Pour nier une phrase mathématique, c'est-à-dire pour écrire le contraire d'une propriété comprenant des quantificateurs, on inverse tous les quantificateurs, c'est-à-dire que l'on remplace $\forall$ par $\exists$ et $\exists$ par $\forall$, sans en changer l'ordre et on nie la conclusion.

1.6.1 Exemple. *Discontinuité de f en t_0 :*

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \alpha > 0 \ , \ \exists t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\text{ tel que } |f(t) - f(t_0)| \geq \varepsilon.$$

Attention, il ne faut pas oublier d'inverser le quantificateur $\forall$ lorsqu'il est sous-entendu, comme dans l'exemple 1.5.2 !

On peut aussi préciser la notion de *contre-exemple* : si on veut montrer qu'une propriété $[\forall x, R(x)]$, comprenant le quantificateur $\forall$, est fausse, il faut montrer que la proposition contraire $[\exists x, \text{non } R(x)]$ est vraie c'est-à-dire qu'il existe un élément x qui ne vérifie pas $R(x)$. Cet élément est appelé un *contre-exemple*.

1.6.2 Exemple. *On reprend l'exemple 1.4.3 : il est équivalent de dire :*
la propriété $[\forall z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = \pm z]$ *est fausse et la propriété* $[\exists z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| \neq \pm z\ ]$ *est vraie.*

Le nombre complexe $z = 1 + i$ est un contre-exemple à la propriété $[\forall z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| = \pm z]$, qui est donc fausse.

1.7 Raisonnement par récurrence

On cherche à démontrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n, est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on démontre la première propriété, en général $P(0)$ ou $P(1)$. Puis, on prouve que pour un n quelconque, si les propriétés $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ sont vraies, la propriété $P(n+1)$ l'est aussi. Alors, de proche en proche à partir de la première propriété, on peut montrer que toutes les propriétés $P(n)$ sont vraies. Le schéma de démonstration est donc le suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} P(0) \text{ vraie et} \\ (P(0), P(1), \ldots, P(n)) \Rightarrow P(n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ P(n) \text{ vraie.}$$

Très souvent, la propriété $P(n)$ suffit à entraîner la propriété $P(n+1)$. Le schéma suivant, moins général mais plus fréquent, est aussi une démonstration par récurrence

$$\left\{\begin{array}{l} P(0) \text{ vraie et} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ P(n) \text{ vraie.}$$

1.7.1 Exemple. $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$

La propriété $P(1)$ est vraie : en effet, en faisant $n = 1$ ci-dessus, on trouve $1 = 1$.
Supposons donc que la propriété $P(n)$ soit vraie. A partir de

$$P(n) :\ 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2,$$

on calcule

$$P(n+1) :\ 1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
On peut donc passer de l'ordre n à l'ordre $n+1$.

On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.8 Bornes supérieures et bornes inférieures dans $\mathbb{R}$.

1.8.1 Définition. *Un sous ensemble $A \in \mathbb{R}$ est borné s'il existe deux nombres réels m et M tels que*

$$\forall x \in A,\ m \leq x \leq M.$$

Rappelons les notions de borne supérieure et borne inférieure d'un sous-ensemble borné non vide de $\mathbb{R}$.

1.8.2 Définition. *Soit $A \subset \mathbb{R}$, borné et non vide.*

1) La borne supérieure de A, notée $\sup A$*, est l'élément de $\mathbb{R}$ défini par :*

$$\forall a \in A \ , \ a \leq \sup A \ \text{ et } \ \forall b \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall a \in A \ , \ a \leq b \ , \ \text{on a } \sup A \leq b.$$

2) La borne inférieure de A, notée $\inf A$*, est l'élément de $\mathbb{R}$ défini par :*

$$\forall a \in A \ , \ a \geq \inf A \ \text{ et } \ \forall b \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall a \in A \ , \ a \geq b \ , \ \text{on a } \inf A \geq b.$$

On résume ces propriétés en disant que la borne supérieure est le plus petit majorant de l'ensemble et la borne inférieure le plus grand minorant de l'ensemble.

Ces nombres sont caractérisés par les propriétés suivantes :

1.8.3 Proposition. *1)* $s = \sup A$ *si et seulement si s est un majorant de A et*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists a \in A \text{ tel que } s - \varepsilon \leq a \leq s$$

2) $t = \inf A$ *si et seulement si t est un minorant de A et*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists a \in A \text{ tel que } t \leq a \leq t + \varepsilon \, .$$

On remarquera que la borne supérieure et la borne inférieure d'un ensemble ne sont pas nécessairement dans l'ensemble.

Chapitre 2

Suites numériques

On suppose que $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Définition et premières propriétés

2.1.1 Définition. *Une suite numérique $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application $n \mapsto s_n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. On dira que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles si l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes si l'espace d'arrivée est $\mathbb{C}$.*

2.1.2 Définition. *On dit qu'une suite numérique $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est :*
- majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq M$,
- minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \geq m$,
-bornée s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|s_n| \leq A$.

Il est facile de voir qu'une suite à valeurs réelles est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.
Pour le cas des suites à valeurs complexes, rappelons que le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est $|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Le corps $\mathbb{C}$ n'étant pas ordonné, les notions de suite majorée ou minorée n'existent pas. On a alors :

2.1.3 Définition. *On dit qu'une suite numérique $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes est bornée s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|s_n| \leq A$, où $|s_n|$ désigne le module du nombre complexe s_n.*

2.1.4 Définition. *i) La suite numérique $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si :*

$$\exists l \in \mathbb{K} \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |s_n - l| \leq \varepsilon.$$

ii) La valeur l est appelé limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = l$.
iii) Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

En niant la propriété *i)*, une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si :

$$\forall l \in \mathbb{K}\ ,\ \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}\ ,\ \exists n \geq N \text{ tel que } |s_n - l| > \varepsilon.$$

Lorsque la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, on notera $s_n \to l$ quand $n \to +\infty$ ou encore $|s_n - l| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

2.1.5 Proposition. *La limite d'une suite numérique* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente est unique.*

2.1.6 Définition. *On dit qu'une suite numérique* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy si elle vérifie la propriété :*

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ , } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p,q \geq N \Rightarrow \left|s_p - s_q\right| \leq \varepsilon.$$

2.1.7 Proposition. *1) Toute suite convergente ou de Cauchy est bornée.*

2) Les suites obtenues en faisant la somme et le produit de deux suites convergentes (respectivement de Cauchy) sont convergentes (respectivement de Cauchy). Dans le cas de suites convergentes les limites sont la somme et le produit des limites des suites de départ.

3) La suite obtenue en faisant le produit par un scalaire d'une suite convergente (respectivement de Cauchy) est convergente (respectivement de Cauchy). Dans le cas d'une suite convergente la limite est le produit de la limite de la suite de départ par ce scalaire.

4) La suite obtenue en prenant le module dans le cas de $\mathbb{C}$ *ou la valeur absolue dans le cas de* $\mathbb{R}$*, d'une suite convergente (respectivement de Cauchy) est convergente (respectivement de Cauchy). Dans le cas d'une suite convergente la limite est le module ou la valeur absolue de la limite de la suite de départ .*

5) Dans le cas d'une suite à valeurs complexes, une suite est convergente (respectivement de Cauchy) si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des suites à valeurs réelles convergentes (respectivement de Cauchy). Dans le cas d'une suite convergente la limite de la partie réelle est la partie réelle de la limite et de même, la limite de la partie imaginaire est la partie imaginaire de la limite de la suite de départ.

6) Toute suite convergente est de Cauchy.

2.2 Suites de nombres réels

2.2.1 Théorème. *Théorème de comparaison :*

1) Soient $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes à valeurs réelles, de limites respectives* s *et* t*. Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq t_n$, *alors* $s \leq t$.

2) Soient $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites à valeurs réelles, telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq t_n \leq s'_n$. *Alors si les suites* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes et ont même limite* s*, la suite* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge aussi vers* s*.*

Remarque. *1)* Le théorème 2.2.1 reste vrai si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang.

2) Même si dans les inégalités du théorème 2.2.1 1), on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, la conclusion ne change pas c'est à-dire que l'inégalité des limites reste large : $s \leq t$.

On le vérifie aisément en considérant par exemple les suites $s_n = \dfrac{1}{2n}$ et $t_n = \dfrac{1}{n}$.

2.2.2 Exemple. *i) Suite géométrique :* $s_n = k^n$. *Cette suite converge si et seulement si* $|k| < 1$ *auquel cas sa limite est* 0 *ou bien si* $k = 1$ *auquel cas la suite est constante.*

ii) Suite puissance : $s_n = n^{\alpha}$. *Cette suite converge si et seulement si* $\alpha \leq 0$. *Sa limite est* 0 *si* $\alpha < 0$ *et* 1 *si* $\alpha = 0$.

2.2.3 Proposition. *Toute suite à valeurs réelles, croissante et majorée ou décroissante et minorée converge.*

2.2.4 Application. *Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ et soit $s = \sup A$ et $t = \inf A$. Alors, il existe une suite croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers s et il existe une suite décroissante $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers t.*

2.3 Suites adjacentes, critère de Cauchy

2.3.1 Définition. *On dit que les suites à valeurs réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :*

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croisssante*
2) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroisssante*
3) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$
4) $b_n - a_n \to 0$ *quand* $n \to \infty$

2.3.2 Corollaire. *Deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toujours convergentes et ont la même limite.*

2.3.3 Théorème. *Critère de Cauchy.*
La suite numérique $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition de Cauchy 2.1.6 si et seulement si elle converge.

2.3.4 Exemple. *1) La suite* $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *converge.*

2) La suite $s_n = \ln n$ *diverge.*

2.4 Sous-suites

2.4.1 Définition. *Une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite numérique $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application strictement croissante $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = s_{p_n}$.*

2.4.2 Exemple. *La suite $(a^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $p_n = 2n$.*

2.4.3 Proposition. *1) Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.*

2) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

3) Toute suite croissante possédant une sous-suite convergente est convergente.

2.4.4 Théorème. *(Bolzano-Weierstrass)*
De toute suite numérique bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

2.4.5 Exemple. *La suite des sommes de Cesàro d'une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ c_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{n}.$$

Alors, si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l. La réciproque est fausse.

2.5 Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$

2.5.1 Définition. *i) On définit* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

ii) On dit que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs réelles tend vers* $+\infty$ *si*

$$\forall A > 0 \text{ , } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow s_n \geq A.$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$

iii) On dit que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs réelles tend vers* $-\infty$ *si*

$$\forall A < 0 \text{ , } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow s_n \leq A.$$

On note $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$

iv) On dit que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs réelles converge dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *si elle converge dans* $\mathbb{R}$ *ou vers* $+\infty$ *ou vers* $-\infty$.

2.5.2 Proposition. *1) Toute suite monotone à valeurs réelles converge dans* $\overline{\mathbb{R}}$.

2) Toute suite à valeurs réelles admet une sous-suite convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Chapitre 3

Suites numériques récurrentes

3.1 Définition

3.1.1 Définition. *Une suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs réelles, est récurrente si elle est définie par un élément initial* u_0 *et une relation de récurrence* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$*, où* f *est une fonction continue, définie sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*.*

3.1.2 Proposition. *S'il existe un intervalle* I *stable par* f *c'est-à-dire si* $f(I) \subset I$ *et si* $u_0 \in I$*, les itérés* $u_1 = f(u_0)$*,* $u_2 = f \circ f(u_0), \ldots u_n = f \circ \cdots \circ f(u_0), \ldots$ *sont bien déterminés et de plus,* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$*.*

Dans toute la suite, on fera l'hypothèse :

Il existe un intervalle I stable par f et tel que $u_0 \in I$.

3.2 Monotonie

3.2.1 Proposition. *i) Si* I *est borné la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

ii) Si $\forall x \in I,\ f(x) \geq x$ *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante :* $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$*.*

iii) Si $\forall x \in I,\ f(x) \leq x$ *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante :* $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$*.*

3.2.2 Proposition. *Si* f *est croissante la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est monotone.*

3.2.3 Corollaire. *Si* f *est décroissante alors les suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont monotones, de sens de variation contraires.*

3.3 Points fixes

3.3.1 Proposition. *Si* f *est continue et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* L*, alors* $f(L) = L$*.*

3.3.2 Définition. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I*. Un point fixe de* f *est une solution de l'équation* $f(x) = x$*.*

3.3.3 Proposition. *Si* $I = [a,b]$ *est un intervalle fermé borné,* f *est continue et* $f(I) \subset I$*, alors, par le théorème des valeurs intermédiaires,* f *admet un point fixe sur* I*.*

3.3.4 Définition. *Une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.*

3.3.5 Proposition. *Soit f dérivable et α un point fixe de f tel que $|f'(\alpha)| > 1$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α, alors elle est stationnaire.*

3.3.6 Exemple. *Soit $f : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ définie par $f(x) = 2x^2 - 1$. Les points fixes sont les solutions de $2x^2 - x - 1 = 0$, c'est-à-dire : 1 et $\dfrac{-1}{2}$.*
Comme $f'(1) = 4$ et $f'(-1/2) = -2$, aucune suite récurrente ne peut converger ni vers $-1/2$ ni vers 1 autrement qu'en étant stationnaire.

3.3.7 Proposition. *Si $\alpha \in I$ est un point fixe de f et $\forall x \in I \setminus \{\alpha\}$, $|f(x) - \alpha| < |x - \alpha|$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α pour tout $u_0 \in I$.*

3.3.8 Définition. *Une application $f : I \longrightarrow I$ est contractante si*

$$\exists k < 1 \text{ tel que } \forall (x,y) \in I \times I, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

3.3.9 Proposition. *Si f est de classe C^1 et vérifie $\sup\limits_{x\in I} |f'(x)| < 1$, elle est contractante.*

La proposition précédente s'applique à une application contractante.

3.3.10 Application. *Si de plus $k = sup_{x\in I}|f'(x)|$, alors $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$ pour tout n. On obtient une vitesse de convergence explicite.*

3.4 Représentations graphiques

Il est possible de représenter sur le graphe de f, noté Γ, l'évolution de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour un choix donné de u_0. Partant de u_0, on obtient $\big(u_0, f(u_0)\big)$ sur Γ. Comme $f(u_0) = u_1$, la droite $y = f(u_0)$ coupe la diagonale $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ au point (u_1, u_1) qui permet d'atteindre $\big(u_1, f(u_1)\big) = (u_1, u_2)$ etc.

3.5 Applications

Les suites récurrentes sont utilisées entre autres pour deux types de problèmes.
- Approximation de solutions d'équations algébriques par des rationnels.
- Approximation numérique de solutions d'équation sans solution algèbrique.

3.5.1 Exemple. *L'équation $x^2 = 3$ a pour solution positive $x = \sqrt{3}$. En écrivant l'équation sous la forme $x = \dfrac{3}{x}$ on voit que $\sqrt{3}$ est un point fixe de $f : x \mapsto \dfrac{3}{x}$. Si une suite récurrente associée à f converge, sa limite est $\sqrt{3}$. Mais comme $f \circ f(x) = x$ pour tout x, la suite est alors nécessairement stationnaire, ce qui n'a pas d'intérêt. Il faut donc chercher une autre fonction g dont $\sqrt{3}$ est un point fixe et telle que $|g'(\sqrt{3})| < 1$.*
On peut chercher g sous la forme $x \mapsto (1-\alpha)x + \alpha\dfrac{3}{x}$.
En effet si $\dfrac{3}{x} = x$ alors $g(x) = (1-\alpha)x + \alpha x = x$. En d'autres termes $\sqrt{3}$ est un point fixe de g pour tout α.
On peut choisir α de sorte que $g'(\sqrt{3}) = 0$ pour garantir une convergence rapide de la suite récurrente.

On a $g'(x) = (1-\alpha) - \alpha\dfrac{3}{x^2}$. Donc $g'(\sqrt{3}) = 1 - 2\alpha$. On choisit $\alpha = \dfrac{1}{2}$, d'où

$$\forall x > 0,\ g : x \longrightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right) \text{ et } g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right).$$

On a $g'(x) \in]0, 1/2[$ *pour tout* $x > \sqrt{3}$. *Donc pour tout* $b > \sqrt{3}$, $[\sqrt{3}, b]$ *est stable par* g.

En partant de $u_0 = 2$ *on obtient*

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4},\ u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{3\times 4}{7}\right) = \frac{97}{56},\ u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{97}{56} + \frac{3\times 56}{97}\right) = \frac{18817}{10864}.$$

Les valeurs des u_i *sont* $u_1 = 1.75, u_2 = 1.73214..., u_3 = 1.732050810....$
alors que $\sqrt{3} = 1.7320508075688...$
Les erreurs sont respectivement de l'ordre de 2×10^{-2}, 10^{-4} *et* 3×10^{-9}.

3.5.2 Exemple. *L'équation* $\tan\theta = 2\theta$ *a une seule solution* θ_0 *sur* $]0, \pi/2[$.
En effet $\theta \mapsto \dfrac{\tan\theta}{\theta}$ *croît de 1 à* $+\infty$ *entre* 0 *et* $\dfrac{\pi}{2}$. *La solution* θ_0 *est un point fixe de* $f : \theta \mapsto \dfrac{\tan\theta}{2}$.

Pour $\theta < \theta_0$, $\dfrac{\tan\theta}{2} < \theta$. *Donc une suite récurrente avec* $u_0 < \theta_0$ *est décroissante et tend vers 0.*

De même si $u_0 > \theta_0$, *la suite récurrente est croissante et sort de l'intervalle de définition. Donc aucune suite récurrente associée à* f *ne converge vers* θ_0.

On note que θ_0 *est également un point fixe de* $f^{-1} : x \mapsto \arctan 2x$. *Les sens de variations des suites récurrentes associées à* f *sont inversés par rapport à* f. *Donc la suite converge en croissant vers* θ_0 *si* $u_0 < \theta_0$ *et en décroissant si* $u_0 > \theta_0$. *En prenant* $u_0 = 1$ *on obtient approximativement :*

1.107..., 1.146..., 1.159..., 1.163..., 1.1649..., 1.1653..., 1.16550..., 1.16554...

pour une valeur de $\theta_0 = 1.165561185....$
L'erreur $u_n - \theta_0$ *est de l'ordre de* λ^n *où* $\lambda = (f^{-1})'(\theta_0)$ *soit* $\lambda = \dfrac{2}{1+4\theta_0^2} \approx 0.31...$ *Comme* $0.31^2 = 1/10$ *on gagne une décimale toutes les deux itérations.*

Chapitre 4

Intégrale de Riemann

4.1 Intégrales des fonctions en escalier

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans tout ce chapitre, on considère des fonctions définies et bornées sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1.1 Définition. *1) On appelle subdivision de $[a,b]$, une suite finie strictement croissante de nombres*

$$\{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \text{ , tels que } t_0 = a \text{ et } t_n = b.$$

2) Le pas d'une telle subdivision est le nombre positif σ, défini par :

$$\sigma = \sup\{|t_{i+1} - t_i| \mid i = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

4.1.2 Définition. *1) Une fonction f, définie sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite en escalier (ou simple dans la terminologie anglo-saxonne) s'il existe une subdivision $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, pour tout $i = 0, 1, \ldots, n-1$.*

2) Une telle subdivision sera dite adaptée à f.

Remarque. *i)* Une subdivision de $[a,b]$ adaptée à une fonction en escalier f n'est pas unique : on peut en effet redécouper certains intervalles et la subdivision obtenue sera toujours adaptée à cette fonction f.

ii) La fonction f peut prendre des valeurs quelconques aux points $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Ces valeurs ne joueront aucun rôle dans l'intégration de ces fonctions et on oubliera souvent de leur donner un nom.

4.1.3 Proposition. *Si f et g sont deux fonctions en escalier sur l'intervalle $[a,b]$, il existe une subdivision adaptée à la fois à f et g.*

4.1.4 Proposition. *1) Si f et g sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$ et si λ et μ sont des scalaires, $\lambda f + \mu g$ et fg sont en escalier.*

2) Si f est en escalier sur $[a,b]$, $|f|$ l'est aussi.

4.1.5 Définition. *Soit f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a,b]$ et $\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ une subdivision de cet intervalle adaptée à f. Soit f_i la valeur de f sur l'intervalle $]t_i,t_{i+1}[$. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le nombre :*

$$\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)f_i = (t_1-t_0)f_0+(t_2-t_1)f_1+\cdots+(t_n-t_{n-1})f_{n-1}.$$

On note ce nombre

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

4.1.6 Proposition. *L'intégrale de f ainsi définie ne dépend pas de la subdivision adaptée à f.*

Remarque. Si l'on dessine le graphe de la fonction en escalier f, les quantités $(t_{i+1}-t_i)f_i$ représentent l'aire des rectangles de côtés $(t_{i+1}-t_i)$ et $|f_i|$, comptée positivement si $f_i \geq 0$ et négativement si $f_i < 0$. Donc $\int_a^b f(t)\,dt$ représente la somme des aires des rectangles compris entre l'axe des t et le graphe de f, comptées positivement quand la valeur prise par f est positive et comptées négativement dans l'autre cas.

4.1.7 Proposition. *1) Soient f et g deux fonctions en escalier sur l'intervalle $[a,b]$ et λ et μ deux scalaires. Alors :*

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt+\mu\int_a^b g(t)\,dt.$$

2) Si f est en escalier sur $[a,b]$,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

3) Si f et g sont en escalier sur $[a,b]$ et si $\forall t\in[a,b]$, $f(t)\leq g(t)$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

4) Si f est en escalier sur $[a,b]$ et si $c\in]a,b[$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt+\int_c^b f(t)\,dt.$$

Remarque. Si on change le sens des bornes d'intégration, on pose par définition, :

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$$

4.2 Fonctions intégrables, intégrale de Riemann

4.2.1 Définition. *On dit qu'une fonction f, définie sur l'intervalle $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est intégrable sur cet intervalle si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier sur $[a,b]$, φ à valeurs réelles ou complexes et η à valeurs réelles positives, telles que*

$$\forall t \in [a,b], |f(t) - \varphi(t)| \leq \eta(t) \text{ et } \int_a^b \eta(t)\,dt \leq \varepsilon.$$

4.2.2 Proposition. *1) Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, f est bornée sur cet intervalle.*

2) Si f et g sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$ et si λ et μ sont des scalaires, $\lambda f + \mu g$ et fg sont intégrables sur $[a,b]$.

3) Si f est intégrable sur $[a,b]$, $|f|$ l'est aussi.

4.2.3 Proposition. *i) Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique tendant vers 0 lorsque $n \to \infty$, et deux suites de fonctions en escalier, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\eta_n \geq 0$, telles que :*

$$\forall t \in [a,b], |f(t) - \varphi_n(t)| \leq \eta_n(t) \text{ et } \int_a^b \eta_n(t)\,dt \leq \varepsilon_n.$$

La suite $\left(\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente.

ii) Sa limite ne dépend pas du choix des suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.2.4 Définition. *Si la fonction f est intégrable sur $[a,b]$, la limite lorsque $n \to \infty$ de la suite $\left(\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée intégrale de Riemann de f et se note $\int_a^b f(t)\,dt$.*

4.2.5 Proposition. *1) Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ et λ et μ deux scalaires. Alors :*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$$

2) Si f est intégrable sur $[a,b]$,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

3) Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et si $\forall t \in [a,b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

4) Si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $c \in]a,b[$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Remarque. Comme pour l'intégrale des fonctions en escalier, on pose par définition, :

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$$

4.2.6 Proposition. *Toute fonction continue f sur un intervalle $[a,b]$ fermé borné y est uniformément continue, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } |t-t'| \leq \eta \Rightarrow |f(t)-f(t')| \leq \varepsilon.$$

4.2.7 Théorème. *Toute fonction continue f sur l'intervalle $[a,b]$ y est intégrable.*

4.2.8 Extension. *On dit qu'une fonction f est continue par morceaux s'il existe une subdivision de $[a,b]$, $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, telle que f soit continue sur chaque intervalle $]t_i,t_{i+1}[$ de cette subdivision et admette des limites à droite et à gauche en tous les points t_i , $i = 0,1,\dots,n$. Tout ce qui précède reste valable si on considère des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.*

4.2.9 Exemple. *Si f est une fonction monotone sur $[a,b]$ à valeurs réelles, alors f est intégrable sur cet intervalle.*

4.2.10 Corollaire. *Première formule de la moyenne*

1) Si f est intégrable et bornée sur $[a,b]$, à valeurs réelles, en posant :

$$m = \inf_{t\in[a,b]} f(t) \text{ et } M = \sup_{t\in[a,b]} f(t),$$

on a :

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq (b-a)M.$$

2) Si de plus f est continue sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)f(c).$$

Remarque. Si f est à valeurs complexes, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions à valeurs réelles f_1 et f_2 telles que $f = f_1 + if_2$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + i\int_a^b f_2(t)\,dt.$$

4.2.11 Définition. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$. On appelle somme de Riemann associée à un découpage $\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ de cet intervalle et à des points c_i choisis dans chaque intervalle $]t_i,t_{i+1}[$, pour $i = 0,1,\dots n-1$, le nombre :*

$$R(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)f(c_i) = (t_1-t_0)f(c_0)+(t_2-t_1)f(c_1)+\cdots+(t_n-t_{n-1})f(c_{n-1}).$$

4.2.12 Théorème. *Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que quelle que soit la somme de Riemann,*

$$R(f) = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)f(c_i) = (t_1-t_0)f(c_0)+(t_2-t_1)f(c_1)+\cdots+(t_n-t_{n-1})f(c_{n-1})$$

associée à un découpage dont le pas est inférieur à α, alors :

$$\left|R(f) - \int_a^b f(t)\right| dt \leq \varepsilon.$$

Remarque. Si f est une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$, on a vu dans le paragraphe précédent que ses sommes de Riemann, définies dans la définition 4.2.11, représentent l'aire comprise entre l'axe des t et le graphe de la fonction en escalier valant $f(c_i)$ sur chaque intervalle $[t_i,t_{i+1}]$, comptée positivement si le graphe est au dessus de l'axe et négativement dans l'autre cas. La convergence de ces sommes vers l'intégrale de la fonction permet de définir l'aire comprise entre l'axe des t et le graphe de f, comptée positivement si le graphe est au dessus de l'axe et négativement dans l'autre cas, comme étant égale à l'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$.

4.3 Intégration d'un produit de fonctions

4.3.1 Théorème. *Deuxième formule de la moyenne*
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, à valeurs réelles, la fonction f étant supposée positive décroissante et la fonction g bornée. Il existe un point $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a^+)\int_a^c g(t)\,dt,$$

où $f(a^+)$ désigne la limite de $f(t)$ quand t tend vers a par valeurs supérieures.

4.3.2 Théorème. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors :

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt \leq \left[\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right]^{1/2}\left[\int_a^b |g(t)|^2\,dt\right]^{1/2}.$$

De plus, si f et g sont continues, cette inégalité est une égalité si et seulement si $|f|$ et $|g|$ sont proportionnelles.

Chapitre 5

Approximation des intégrales

On connaît des formules qui permettent de calculer l'intégrale de quelques fonctions. Il y a relativement peu de fonctions dont on sait calculer l'intégrale. Il suffit même de changer légèrement l'expression d'une fonction pour passer d'une fonction que l'on sait intégrer à une fonction qu'on ne sait pas intégrer. Par exemple, on sait que

$$\int_a^b \sin t\, dt = \cos a - \cos b,$$

mais on ne sait pas calculer

$$\int_a^b \frac{\sin t}{t}\, dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b \sin(t^2)\, dt.$$

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ prolongée par la valeur 1 en $t = 0$, est intégrable sur tout intervalle $[a, b]$ puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour la fonction $t \mapsto \sin(t^2)$. A défaut de pouvoir calculer ces intégrales, on doit savoir les approcher.

Mais, même s'il s'agit d'intégrales qu'on sait calculer, leur calcul peut être long et compliqué et il peut être avantageux de le remplacer par un calcul approché.

5.1 Méthode des rectangles

Soit f une fonction monotone de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple, on suppose que f est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé arbitrairement, on pose $h = \dfrac{(b-a)}{n}$ et considère la subdivision de $[a, b]$:

$$a < a+h < a+2h < \cdots < a+kh < \cdots < a+nh = b.$$

On a évidemment, pour $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$hf\big(a+(k-1)h\big) \leq \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f(t)\, dt \leq hf\big(a+kh\big).$$

D'où, en sommant :

$$h\sum_{k=0}^{n-1} f\big(a+kh\big) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq h\sum_{k=1}^{n} f\big(a+kh\big).$$

La méthode des rectangles consiste à approcher l'intégrale de f par des sommes d'aires de rectangles correspondant aux sommes finies qui encadrent la valeur de l'intégrale dans l'inégalité ci dessus.

On peut donner une estimation de l'erreur $\mathcal{E}$ commise en remplaçant l'intégrale de f par l'une de ces sommes : on majore la différence entre l'intégrale de f et l'une de ces sommes par la différence des sommes majorant et minorant cette intégrale, soit :

$$\mathcal{E} \leq h\sum_{k=1}^{n} f\big(a+kh\big) - h\sum_{k=0}^{n-1} f\big(a+kh\big) = h\big(f(b)-f(a)\big) = \frac{(b-a)}{n}\big(f(b)-f(a)\big).$$

L'erreur est donc de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$. Il suffit donc en théorie de découper l'intervalle $[a,b]$ en suffisamment de petits sous-intervalles pour obtenir une erreur aussi petite que l'on veut.

5.1.1 Exemple. *Calcul approché de*

$$\int_0^1 e^{t^2}\,dt,$$

par la méthode des rectangles.

Pour obtenir la valeur de cette intégrale à $1/100$ près, il faudrait prendre $n \geq 100(e-1)$, soit $n \geq 172$, ce qui exige de calculer la valeur de la fonction e^{t^2} en 172 points.

Cet exemple montre que cette méthode n'est pas très efficace.

5.2 Méthode des trapèzes

Méthode des trapèzes

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme pour la méthode des rectangles, on prend la subdivision de $[a,b]$:

$$a < a+h < a+2h < \cdots < a+kh < \cdots < a+nh = b.$$

Pour $0 \leq k \leq n$, posons $x_k = a+kh$. Pour essayer d'améliorer le résultat précédent, l'idée est de remplacer la fonction f sur chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ non plus par une constante mais par une fonction affine prenant les mêmes valeurs que f aux points x_{k-1} et x_k, c'est-à-dire par la fonction g_k définie par :

$$g_k(t) = \frac{f(x_k)\,[t-x_{k-1}] - f(x_{k-1})\,[t-x_k]}{h}.$$

On remarque que :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g_k(t)\,dt = \frac{h}{2}\big[f(x_{k-1}) + f(x_k)\big].$$

La méthode des trapèzes consiste donc à approcher $\int_a^b f(t)\,dt$ par la somme de ces expressions pour $k = 1, 2, \ldots, n$, c'est-à-dire par :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) \\ &= \frac{(b-a)}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})\right]. \end{aligned}$$

Comme dans le cas de la méthode des rectangles, il s'agit d'évaluer l'erreur $\mathcal{E}$, commise en remplaçant l'intégrale de f par cette somme.
On a besoin d'un lemme :

5.2.1 Lemme. *Soit f une fonction de $[u,v]$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $[u,v]$ et telle qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall t \in [u,v]$, $\alpha \le f''(t) \le \beta$. Alors :*

$$\frac{\alpha(v-u)^3}{12} \le \frac{v-u}{2}\big(f(u) + f(v)\big) - \int_u^v f(t)\,dt \le \frac{\beta(v-u)^3}{12}.$$

Démonstration. La fonction h définie par $h(t) = f(t) + \frac{\alpha}{2}(t-u)(v-t)$ prend les mêmes valeurs que f aux points u et v et vérifie pour tout $t \in [u,v]$:

$$h''(t) = f''(t) - \alpha \ge 0.$$

C'est donc une fonction convexe.
Si g est la fonction affine prenant les mêmes valeurs que f (donc que h) en u et v, on aura donc : $\forall t \in [u,v]$, $h(t) \le g(t)$. D'où :

$$\int_u^v h(t)\,dt = \int_u^v f(t)\,dt + \frac{\alpha}{2}\int_u^v (t-u)(v-t)\,dt \le \int_u^v g(t)\,dt.$$

Or,

$$\int_u^v (t-u)(v-t)\,dt = \left[-\frac{t^3}{3} + (u+v)\frac{t^2}{2} - uvt\right]_u^v = \frac{(v-u)^3}{6}.$$

D'où, en utilisant le calcul précédent :

$$\int_u^v g(t)\,dt = \frac{v-u}{2}\left[f(u) + f(v)\right] \ge \int_u^v f(t)\,dt + \frac{\alpha}{12}(v-u)^3.$$

Ceci donne bien la première inégalité du lemme. La seconde s'obtient de la même façon en considérant la fonction concave $t \mapsto f(t) + \frac{\beta}{2}(t-u)(v-t)$. □

En appliquant ce lemme à chaque sous-intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ et en sommant sur k, de 1 à n, on obtient une estimation de l'erreur $\mathcal{E}$ dans la méthode des trapèzes :

5.2.2 Proposition. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $[a,b]$ et telle que pour tout $t \in [a,b]$, $\alpha \le f''(t) \le \beta$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\frac{\alpha(b-a)^3}{12n^2} \le S_n - \int_a^b f(t)\,dt \le \frac{\beta(b-a)^3}{12n^2},$$

avec

$$S_n = \frac{(b-a)}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})\right].$$

On peut remarquer que l'erreur dans la méthode des trapèzes tend vers 0 comme $\dfrac{1}{n^2}$ lorsqu'on découpe l'intervalle $[a,b]$ en sous-intervalles de plus en plus petits, ce qui est meilleur que pour la méthode des rectangles.

5.2.3 Exemple. *Calcul appoché de*

$$\int_0^1 e^{t^2}\,dt,$$

par la méthode des trapèzes.

On a $f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2}$, d'où pour $x \in [0,1]$: $2 \leq f''(x) \leq 6e < 17$.
Il suffit donc de prendre $n \geq 12$ pour obtenir une valeur approchée de cette intégrale à $1/100$ près.
La méthode des trapèzes est donc plus efficace que la méthode des rectangles.

Chapitre 6

Calcul des intégrales

6.1 Primitives

6.1.1 Définition. *On rappelle qu'une fonction f, définie sur un intervalle $[a,b]$ admet une primitive F si F est une fonction dérivable sur l'intervalle $]a,b[$ et si :*

$$\forall t \in]a,b[\ ,\ F'(t) = f(t).$$

6.1.2 Rappel. *Supposons qu'une fonction f, définie sur un intervalle $[a,b]$ ait une primitive F, alors toutes les primitives de f sont les fonctions $F + \lambda$, où λ est un scalaire arbitraire.*

6.1.3 Théorème. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit $x_0 \in [a,b]$. Alors la fonction F_0, définie par :*

$$\forall x \in [a,b]\ ,\ F_0(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

est une primitive de f. En particulier, F_0 est dérivable sur $]a,b[$ avec $F_0'(x) = f(x)$.

6.1.4 Corollaire. *1) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

2) Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ telle que

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0.$$

Alors, $f = 0$.

6.1.5 Proposition. *1) Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, intégrable et bornée sur $[a,b]$. Alors la fonction F, définie pour $x \in [a,b]$ par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

est continue sur $[a,b]$.

2) Si de plus, f est positive sur $[a,b]$, F est croissante.

6.1.6 Théorème. *Intégration par parties*
Soient u et v deux fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$. On a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

6.1.7 Théorème. *Changement de variable*
Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et φ une fonction continûment dérivable de $[c,d]$ dans $[a,b]$ telle que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d f(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds.$$

6.2 Calcul des primitives

Fonctions puissance :

$$\int e^{(\alpha+i\beta)t}\,dt = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{(\alpha+i\beta)}, \quad \int \frac{dt}{t} = \ln|t|, \quad \int t^\alpha\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ (\alpha \neq -1).$$

Fractions rationnelles :
On utilise la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples et on est ramené au calcul des primitives des polynômes pour la partie entière et des différents éléments simples.
On peut calculer les primitives de tous les différents types d'éléments simples en utilisant des changements de variables et des intégrations par partie.

Fonctions trigonométriques :

$$\begin{array}{lll}
\displaystyle\int \sin t\,dt = -\cos t, & \displaystyle\int \cos t\,dt = \sin t, & \displaystyle\int \mathrm{tg}\,t\,dt = -\ln|\cos t| \\
\displaystyle\int \mathrm{cotg}\,t\,dt = \ln|\sin t|, & \displaystyle\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right|, & \displaystyle\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \\
\displaystyle\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \mathrm{tg}\,t, & \displaystyle\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\mathrm{cotg}\,t, & \displaystyle\int \frac{dt}{\sin t\cos t} = \ln|\mathrm{tg}|\,t.
\end{array}$$

Fonctions hyperboliques :

$$\begin{array}{lll}
\displaystyle\int \mathrm{sh}\,t\,dt = -\mathrm{ch}\,t, & \displaystyle\int \mathrm{ch}\,t\,dt = \mathrm{sh}\,t, & \displaystyle\int \mathrm{th}\,t\,dt = \ln\mathrm{ch}\,t \\
\displaystyle\int \mathrm{coth}\,t\,dt = \ln|\mathrm{sh}\,t|, & \displaystyle\int \frac{dt}{\mathrm{sh}\,t} = \ln\left|\mathrm{th}\,\frac{t}{2}\right|, & \displaystyle\int \frac{dt}{\mathrm{ch}\,t} = 2\mathrm{arctg}\,e^t \\
\displaystyle\int \frac{dt}{\mathrm{ch}^2 t} = \mathrm{th}\,t, & \displaystyle\int \frac{dt}{\mathrm{sh}^2 t} = -\mathrm{coth}\,t, & \displaystyle\int \frac{dt}{\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t} = \ln|\mathrm{th}|\ t.
\end{array}$$

Fonctions inverses :

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a}, & \displaystyle\int \frac{dt}{t^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{t-a}{t+a} \\
\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} = \mathrm{argsh}\frac{t}{|a|}, & \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \mathrm{argch}\frac{t}{a}.
\end{array}$$

6.2.1 Exemple. *Calcul de primitive d'un polynôme en* $\cos t$ *et* $\sin t$.

Chapitre 7

Matrices

On suppose que $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

7.1 Matrices 2×2

7.1.1 Définition. *i) Une matrice 2×2 est un tableau de 4 nombres réels ou complexes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ii) Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ sont les vecteurs colonnes.

iii) Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sont les vecteurs lignes.

7.1.2 Notations. *L'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels ou complexes est noté $M_2(\mathbb{K})$.*

7.1.3 Cas particulier. *i) Une matrice 2×2 est dite triangulaire supérieure si elle est de la forme*
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

ii) Une matrice 2×2 est dite triangulaire inférieure si elle est de la forme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

iii) Une matrice 2×2 est dite diagonale si elle est de la forme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

7.1.4 Définition. *La transposée d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est la matrice*

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

7.1.5 Définition. *La trace d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est le nombre réel ou complexe*

$$\operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22}$$

7.1.6 Définition. *Opérations sur les matrices.*
Soient deux matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *et deux nombres réels ou complexes* λ *et* μ.

i) *La matrice* $\lambda A + \mu B$ *est définie par :*

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} \end{pmatrix}$$

ii) *La matrice produit* AB *est définie par*

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Attention : le produit de matrices n'est pas commutatif !

7.2 Matrices 3×3

7.2.1 Définition. *i)* *Une matrice* 3×3 *est un tableau de 9 nombres réels ou complexes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ii) *Les vecteurs de coordonnées* $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ *sont les vecteurs colonnes.*

iii) *Les vecteurs de coordonnées* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *sont les vecteurs lignes.*

7.2.2 Notations. *L'ensemble des matrices* 3×3 *à coefficients réels ou complexes est noté* $M_3(\mathbb{K})$.

7.2.3 Cas particulier. *i)* *Une matrice* 3×3 *est dite triangulaire supérieure si elle est de la forme* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

ii) *Une matrice* 3×3 *est dite triangulaire inférieure si elle est de la forme* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

iii) *Une matrice* 3×3 *est dite diagonale si elle est de la forme* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

7.2.4 Définition. *La transposée d'une matrice* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *est la matrice*

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

7.2.5 Définition. *La trace d'une matrice* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *est le nombre réel ou complexe*

$$\operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

7.2.6 Définition. *Opérations sur les matrices.*
Soient deux matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ *et deux réels* λ *et* μ.

i) La matrice $\lambda A + \mu B$ *est définie par :*

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{13} + \mu b_{13} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} & \lambda a_{23} + \mu b_{23} \\ \lambda a_{31} + \mu b_{31} & \lambda a_{32} + \mu b_{32} & \lambda a_{33} + \mu b_{33} \end{pmatrix}$$

ii) La matrice produit AB *est définie par* $AB =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Attention : le produit de matrices n'est pas commutatif !

7.3 Matrices $m \times n$

7.3.1 Définition. *i) Une matrice* $m \times n$ *est un tableau de* mn *nombres réels ou complexes, comportant* m *lignes et* n *colonnes :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n}$$

ii) Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ *sont les vecteurs colonnes.*

iii) Les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \end{pmatrix}$ $\ldots$ $\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$ *sont les vecteurs lignes.*

iv) Le premier indice est l'indice de ligne, le second est l'indice de colonne.

7.3.2 Notations. *L'ensemble des matrices* $m \times n$ *à coefficients réels ou complexes est noté* $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

7.3.3 Définition. *Lorsque* $m = n$, *on dira que* A *est une matrice carrée d'ordre* n *et on note* $M_{m,n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$.

7.3.4 Définition. *i) La trace d'une matrice carrée est la somme de ses termes diagonaux :*

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ii) La transposée d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$ est la matrice $n\times m$ telle que :

$$^{t}A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

7.3.5 Proposition. *Opérations sur les matrices*

i) On peut faire la somme de 2 matrices de même taille : si $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$, alors $A+B = \left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$

ii) On peut multiplier une matrice par un scalaire : si $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$.

iii) On peut faire le produit de 2 matrices à condition que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la seconde. Si $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq n}$ est une matrice $m\times n$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq p}$ une matrice $n\times p$, la matrice AB est la matrice $m\times p$ définie par :

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{1\leq i\leq m;1\leq j\leq p}$$

Attention : même dans le cas de matrices carrées, le produit de matrices n'est pas commutatif !

7.3.6 Exemple. *Matrices carrées remarquables :*
Matrice identité, Matrices diagonales, triangulaires supérieures ou inférieures, matrices de transformations élémentaires....

Chapitre 8

Déterminants, inversion des matrices carrées

8.1 Déterminants des matrices carrées

8.1.1 Définition. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n; 1 \le j \le n}$ une matrice carrée $n \times n$. On appelle déterminant de A le nombre, noté* $\det A$*, calculé par récurrence de 2 manières différentes (mais donnant le même résultat) :*

i) *développement suivant la ligne i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A)$$

ii) *développement suivant la colonne j, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}(A)$$

où les $\Delta_{ij}(A)$ appelés mineurs d'indice ij, sont les déterminants des matrices carrées $(n-1) \times (n-1)$, obtenues en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

8.1.2 Définition. *Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n; 1 \le j \le n}$ une matrice carrée $n \times n$.*

i) *On appelle cofacteur d'indice ij de la matrice A le nombre $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A)$*

i) *On appelle matrice des cofacteurs la matrice* Co A *définie par :*

$$\mathrm{Co}\, A = \left((-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A) \right)_{1 \le i \le n; 1 \le j \le n}$$

8.1.3 Proposition. *Le déterminant de la transposée d'une matrice A est le même que celui de A.*

Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n; 1 \le j \le n}$ une matrice carrée $n \times n$. En appelant $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ les vecteurs colonnes de A, on dira que le déterminant de A est le déterminant de ses vecteurs colonnes et on notera $\det A = \det(u_1, u_2, \dots u_n)$*. Avec cette interprétation, on a :*

8.1.4 Proposition. *Le déterminant de n vecteurs $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ est :*

i) *antisymétrique : le déterminant change de signe quand on inverse 2 vecteurs. Par exemple,* $\det(u_1, u_2, \dots u_n) = -\det(u_2, u_1, \dots u_n)$

ii) *linéaire par rapport à chaque vecteur : si on remplace un vecteur u_j par un combinaison linéaire $\lambda u_j + \mu v_j$, où λ et μ sont des nombres réels ou complexes, alors*

$\det(u_1, \ldots, \lambda u_j + \mu v_j, \ldots u_n) = \lambda \det(u_1, \ldots, u_j \ldots u_n) + \mu \det(u_1, \ldots, v_j, \ldots u_n)$.

iii) *invariant par transvection : si on additionne à l'un des vecteur un multiple de l'un des autres vecteurs, le déterminant ne change pas.*
Par exemple, $\det\,(u_1 + \lambda u_2, u_2, \ldots u_n) = \det(u_1, u_2, \ldots u_n)$

Puisque le déterminant de la transposée d'une matrice est égal au déterminant de la matrice, la proposition ci-dessus est vraie aussi pour les vecteurs lignes.

8.1.5 Cas particulier. *i)* *Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des coefficients diagonaux.*

ii) *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit des coefficients diagonaux.*

iii) *Le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants.*

iv) *Si $AB = I$, alors* $\det\,(AB) = \det A \det B = \det I = 1$.

8.2 Matrices inversibles

8.2.1 Définition. *Un matrice carrée $n \times n$ A est inversible s'il existe une matrice carrée $n \times n$, notée A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ où I_n désigne la matrice identité de taille n, c'est-à-dire la matrice diagonale ayant des 1 sur la diagonale.*

8.2.2 Théorème. *Soit A une matrice carrée $n \times n$, alors :*

$$A \cdot {}^t\mathrm{Co}\,A = {}^t\mathrm{Co}\,A \cdot A = \det A \cdot I_n$$

et donc, A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul et dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{Co}A}{\det A}$$

8.2.3 Proposition. *i)* *La transposée d'une matrice inversible est inversible et son inverse est la transposée de la matrice de départ.*

ii) *Le produit de 2 matrices inversibles est inversible et de plus : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Remarque. On peut trouver l'inverse d'une matrice carrée inversible en utilisant la méthode du pivot de Gauss, qui sera étudié dans le chapitre sur les systèmes linéaires, en résolvant le système linéaire : $AX = Y$ dont la solution est $X = A^{-1}Y$.

8.2.4 Définition. *On appelle rang d'une matrice $m \times n$ la taille maximale d'une matrice carrée inversible extraite de la matrice.*

Chapitre 9

Espaces vectoriels de dimension finie

9.1 $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

9.1.1 Définition. *Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est un ensemble $(E,+,\times)$, muni de deux lois, qui vérifient :*

i) $(E,+)$ *est un groupe commutatif : existence d'une élément neutre O, existence de l'opposé, associativité, commutativité.*

ii) la multiplication par un réel λ qui vérifie, pour $x, y \in E$: $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$, $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$, $1x = x1 = x$.

Les éléments de E sont appelés les vecteurs.

9.1.2 Exemple. *i) $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

ii) $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

iii) $M_{m,n}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque. De la même manière, on peut définir un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque $\mathbb{K}$ est un corps donné.

9.1.3 Définition. *i) Soit E un espace vectoriel. Une combinaison linéaire de n vecteurs $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de E est un vecteur de E, de la forme : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, où les coefficients λ_k, $k = 1, 2 \ldots n$ sont des réels.*

ii) Une famille de vecteurs est libre si toute combinaison linéaire de ces vecteurs, à coefficients non tous nuls n'est pas le vecteur nul.

ii) Une famille de vecteurs est liée si elle n'est pas libre.

9.1.4 Définition. *i) Une partie de E est génératrice si tout vecteur de E s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette partie.*

ii) Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il existe une partie génératrice finie.

iii) La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie est le nombre minimal d'éléments d'une partie génératrice.

9.1.5 Théorème. *La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie est le nombre maximal d'éléments d'une partie libre.*

Remarque. Il existe des espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie, on dira qu'ils sont de dimension infinie, par exemple $C([0,1],\mathbb{R})$, ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles.

9.1.6 Exemple. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, …, $\mathbb{R}^n$, … *sont des espaces vectoriels de dimension finie.*

9.2 Sous-espaces vectoriels

9.2.1 Définition. *Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel si :*

i) $0 \in F$

ii) *F est non vide et stable par addition : si* $x, y \in F$*, alors* $x + y \in F$

iii) *F est stable par multiplication par un scalaire : si* $x \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*, alors* $\lambda x \in F$

9.2.2 Proposition. *Caractérisation des sous-espaces vectoriels*
Soit E un espace vectoriel. Une partie $F \subset E$ *est un sous-espece vectoriel de E si et seulement si F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire si et seulement si, étant donnés deux éléments de* $x, y \in F$ *et un réel* λ*, alors* $x + \lambda y \in F$*.*

9.2.3 Définition. *Somme de sous-espaces vectoriels*
Soient F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. La somme de* F_1 *et* F_2 *est définie par :*

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$$

9.2.4 Définition. *Somme directe de sous-espaces vectoriels*
Deux sous-espaces vectoriels F_1 *et* F_2 *d'un espace vectoriel E sont dits en somme directe si tout élément* $x \in F_1 + F_2$ *s'écrit de manière unique comme* $x = x_1 + x_2$*,* $x_1 \in F_1$ *et* $x_2 \in F_2$*.*

9.2.5 Proposition. *Caractérisation d'une somme directe*
Deux sous-espaces vectoriels F_1 *et* F_2 *d'un espace vectoriel E sont en somme directe si et seulement si* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$*.*

9.2.6 Notations. *On note* $F_1 \oplus F_2$ *la somme directe de deux sous-espaces de E.*

9.2.7 Définition. *Sous-espaces vectoriels supplémentaires*
Deux sous-espaces vectoriels F_1 *et* F_2 *d'un espace vectoriel E sont dits supplémentaires si tout élément* $x \in E$ *s'écrit de manière unique comme* $x = x_1 + x_2$*,* $x_1 \in F_1$ *et* $x_2 \in F_2$*.*

9.2.8 Notations. *On note* $E = F_1 \oplus F_2$ *lorsque* F_1 *et* F_2 *sont deux sous-espaces supplémentaires de E.*

9.2.9 Proposition. *Caractérisation de sous-espaces vectoriels supplémentaires*
Deux sous-espaces F_1 *et* F_2 *d'un espace vectoriel E sont supplémentaire si et seulement si* $F_1 + F_2 = E$ *et* $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

9.2.10 Théorème. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors*

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier $\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim(F) + \dim(G)$.

9.3 Bases d'un espace vectoriel de dimension finie

9.3.1 Définition. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un système de vecteurs* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *est une base si c'est une partie libre et génératrice de E.*

9.3.2 Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension n.*

i) Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments qui est égal à la dimension de E.

ii) Une famille libre a au plus n éléments et toute famille libre de n éléments est une base de E.

iii) Une famille génératrice a au moins n éléments et toute famille génératrice de n éléments est une base de E.

9.3.3 Exemple. *Bases de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\ldots$, $\mathbb{R}^n$, …...

9.3.4 Théorème. *Théorème de la base incomplète.*
Soit E un espace vectoriel de dimension n. Toute famille libre de m éléments, où $m < n$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, *peut être complétée en une base* $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots e_n\}$ *de E.*

9.4 Application aux équations différentielles linéaires

9.4.1 Définition. *Soit a et b deux nombres réels. Une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants est une équation de la forme :*

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \text{ ou plus simplement } y'' + ay' + by = 0$$

où y est une fonction inconnue.

9.4.2 Théorème. *Supposons que le polynôme* $X^2 + aX + b$ *ait deux racines réelles ou complexes distinctes* α *et* β.

i) Si α *et* β *sont réelles, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants* $y'' + ay' + by = 0$, *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dim 2 dont une base est formée des 2 fonctions* $e^{\alpha x}$ *et* $e^{\beta x}$.

ii) Si α *et* β *sont non réelles, l'ensemble des solutions complexes de l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants* $y'' + ay' + by = 0$, *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dim 2 dont une base est formée des 2 fonctions* $e^{\alpha x}$ *et* $e^{\beta x}$.

iii) Si α *et* β *sont non réelles, elles sont alors complexes conjuguées et l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants* $y'' + ay' + by = 0$, *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dim 2 dont une base est formée des 2 fonctions* $e^{\gamma x}\sin(\omega x)$ *et* $e^{\gamma x}\cos(\omega x)$, *où* γ *est la partie réelle et* ω *est la partie imaginaire de* α *ou de* β.

Chapitre 10

Applications linéaires

10.1 Applications linéaires

10.1.1 Définition. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application $T : E \to F$ est une application linéaire si pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$$

10.1.2 Exemple. *L'application identité d'un espace vectoriel est une application linéaire.*

10.1.3 Définition. *Soient E et F deux espaces vectoriels.*
Une application linéaire $T : E \to F$ peut être injective, surjective ou bijective. Lorsqu'elle est bijective, on dira que c'est un automorphisme.

10.1.4 Définition. *Soient E et F deux espaces vectoriels et $T : E \to F$, une application linéaire. On appelle noyau de T et on note* Ker T*, le sous ensemble de E défini par :*

$$\text{Ker } T = \{x \in E \mid T(x) = 0\}$$

C'est donc l'image réciproque de 0 *par T.*

10.1.5 Proposition. *Soient E et F deux espaves vectoriels et $T : E \to F$, une application linéaire. L'image de T, notée* Im T *est un sous-espace vectoriel de F et son noyau* Ker T *est un sous-espace vectoriel de E.*

10.1.6 Exemple. *Projections, symétries, rotations, translations, homothéties, similitudes.*

10.1.7 Théorème. *Théorème du rang*
Soit $T : E \to E$ une application d'un espace de dimension n dans lui-même. Alors :

$$\dim \text{Im } T + \dim \text{Ker } T = n$$

10.1.8 Corollaire. *Caractérisation des automorphismes*
Soit $T : E \to E$ une application d'un espace de dimension n dans lui-même. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *i)* *T est injective.*
- *ii)* *T est surjective.*
- *iii)* *T est bijective.*

10.2 Matrice d'une application linéaire

10.2.1 Proposition. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions n et m. Une application linéaire $T : E \to F$ est entièrement déterminée par ses valeurs sur une base de E.*

10.2.2 Définition. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et m. Soit $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ une base de E et $\{f_1, f_2, \dots f_m\}$ une base de F et soit $T : E \to F$ une application linéaire de E dans F .*
La matrice A, de taille $m \times n$, dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs $T(e_1), T(e_2), \cdots, T(e_n)$ dans la base $\{f_1, f_2, \dots f_m\}$ est appelée la matrice de l'application linéaire T associée aux bases $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ et $\{f_1, f_2, \dots f_m\}$.

10.2.3 Proposition. *Avec les notations précédentes, si X est le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\{e_1, e_2, ...e_n\}$, alors le vecteur colonne Y des coordonnées du vecteur $T(x)$ dans la base $\{f_1, f_2, \dots f_m\}$ est donné par :*

$$Y = AX$$

10.2.4 Application. *Matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, munis de leurs bases canoniques.*

10.2.5 Proposition. *i) La matrice d'une somme d'applications linéaires est la somme des matrices des applications linéaires.*

ii) La matrice du produit d'une application linéaire par un scalaire est le produit de la matrice de l'application linéaire par ce scalaire.

iii) La matrice d'une composition d'applications linéaires est le produit des matrices des applications linéaires.

10.2.6 Proposition. *La matrice dans une base donnée de la réciproque T^{-1} d'une application linéaire inversible T est l'inverse de la matrice de l'application linéaire.*

Chapitre 11

Systèmes linéaires

11.1 Cas général

11.1.1 Définition. *i) On appelle système linéaire de m équations à n inconnues* $x_1, x_2, \cdots, x_n$*, le système suivant :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

où les a_{ij}*, pour* $1 \leq i \leq m$ *et* $1 \leq j \leq n$ *sont des nombres réels, appelés coefficients du système.*

ii) Tout n-uplet $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *vérifiant les m équations précédentes est appelé solution du système.*

iii) Le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

s'appelle le système homogène associé.

11.1.2 Proposition. *Ecriture matricielle*

Si A est la matrice $m \times n$ *définie par* $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$*, X est la matrice colonne définie par* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ *et B est la matrice colonne définie par*

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$, *alors le système s'écrit :* $AX = B$.

Remarque. Un système peut avoir, une solution unique, une infinité de solutions (qui s'expriment en fonction de paramèmes) ou pas de solution.

11.2 Systèmes de Cramer

11.2.1 Définition. *Un système de Cramer est un système de taille $n \times n$ ayant une unique solution.*

11.2.2 Proposition. *Le système* $\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$ *est un système de Cramer si et seulement si la matrice* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *est inversible, ce qui est le cas si et seulement si* $\det A \neq 0$.

11.2.3 Application. *Formules de Cramer.*

11.3 Réduction des sytèmes linéaires

11.3.1 Théorème. *Tout système linéaire de n équations à n inconnues, $X = AB$ peut s'écrire sous la forme $A'X = B'$ où A' est une matrice $n \times n$, triangulaire supérieure, ayant des 0 ou des 1 sur la diagonale.*

DÉMONSTRATION : *Méthode du pivot de Gauss.*

Chapitre 12

Diagonalisation

12.1 Changement de base

12.1.1 Définition. *Dans un espace vectoriel E de dimension n, on considère deux bases $B = \{e_1, e_2, \cdots e_n\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2, \cdots e'_n\}$. Soit P la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\{e'_1, e'_2, \cdots e'_n\}$ exprimées dans la base B. La matrice P s'appelle la matrice de passage de la base B à la base B'.*

12.1.2 Proposition. *La matrice de passage P est inversible.*

12.1.3 Proposition. *Formule de changement de base pour un vecteur.*
Soit x un vecteur de l'espace vectoriel E, muni des bases B et B'.
On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base B et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ x'_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base B'. Alors :

$$X = PX'$$

12.1.4 Proposition. *Formule de changement de base pour une matrice.*
Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni de deux bases B et B' et T une application linéaire de E dans E. Si P est la matrice de passage de B à B' et si T est représenté par les matrices A dans la base B et A' dans la base B', alors :

$$A' = P^{-1}AP$$

12.1.5 Définition. *Les matrices A et A' sont dites semblables.*

Remarque. Deux matrices semblables ont le même déterminant.

12.2 Réduction des matrices carrées

Dans ce paragraphe, on considère $E = \mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique. Les matrices carrées sont donc les matrices des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.

12.2.1 Définition. *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n.*

i) On appelle valeur propre de A un réel λ tel qu'il existe un vecteur non nul X vérifiant :

$$AX = \lambda X$$

ii) X est appelé vecteur propre de la matrice A, associé à la valeur propre λ.

iii) L'ensemble des valeurs propres de la matrice A est appelé le spectre de A.

iv) On appelle polynôme caractéristique de la matrice A, le polynôme en λ, de degré n, défini par $P(\lambda) = \det\,(A - \lambda I)$.

12.2.2 Théorème. *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n.*

i) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A.

ii) Les vecteurs propres de A, associés à la valeur propre λ forment un sous-espace vectoriel E_λ de $\mathbb{R}^n$ tel que : $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)$.

12.2.3 Définition. *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n.*

i) Une valeur propre de A est dite de multiplicité algébrique n_λ si λ est une racine de multiplicité n_λ du polynôme caractéristique de A.

ii) On appelle espace propre associé à la valeur propre λ le sous-espace E_λ des vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

iii) On appelle espace caractéristique associé à la valeur propre λ le sous-espace $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{n_\lambda}$.

Remarque. Pour une valeur propre donnée, l'espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)$ est un sous-espace de l'espace caractéristique $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)^{n_\lambda}$.

12.2.4 Définition. *Une matrice A est diagonalisable s'il existe une base $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de A.*

12.2.5 Proposition. *Soit A une matrice diagonalisable et $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ une base de vecteurs propres de A.*
Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, alors, la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale dont la diagonale est formée des valeurs propres de A. De plus, si n_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ, cette valeur figure n_λ fois sur la diagonale de D.

12.2.6 Théorème. *Pour qu'une matrice A dont le polynôme caractéristique est scindé soit diagonalisable il faut et il suffit que, pour toute valeur propre λ, la dimension de l'espace propre E_λ soit égale à l'ordre de multiplicité algébrique de la valeur propre λ.*

12.2.7 Corollaire. *Une matrice dont le polynôme caractéristique n'a que des racines simples réelles est diagonalisable.*