Devoir à la maison, avril 2017

Exercice 1. On fixe un réel $c > 0$. Pour tout $b \in [0, c[$, on considère l'équation différentielle linéaire sans second membre :

$$(E_b) \qquad x''(t) + 2bx'(t) + c^2 x(t) = 0.$$

Par hypothèse, $b^2 - c^2$ est < 0. On pose $\sigma = \sqrt{c^2 - b^2}$ et $P(X) = X^2 + 2bX + c^2$.

1. Exprimer en fonction de b et σ les racines λ et μ de l'équation $P(X) = 0$, en supposant que la partie imaginaire de λ est > 0.
2. Soit $\nu \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction à valeurs complexes $e_\nu : t \mapsto e^{\nu t}$ est solution de (E_b) si et seulement si ν est racine de P.
3. Montrer que les fonctions u et v, définies par $u(t) = e^{-bt}\cos(\sigma t)$ et $v(t) = e^{-bt}\sin(\sigma t)$ sont solutions de (E_b).

   On rappelle que pour toute solution w de (E_b) à valeurs réelles, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tels que $w = \alpha u + \beta v$. (On ne demande pas de démontrer ceci.) On considère maintenant l'équation différentielle avec second membre :

   $$(S_b) \qquad x''(t) + 2bx(t) + c^2 x(t) = \cos(ct).$$

4. On suppose $b \neq 0$. Montrer alors qu'il existe une unique solution $f = f_b$ de (S_b) de la forme $t \mapsto A\sin(ct)$, pour une constante $A = A_b$ à préciser. Déterminer l'unique solution x_b de (S_b) telle que $x_b(0) = 0 = x_b'(0)$.
5. On suppose $b = 0$. Montrer alors qu'il existe une unique solution g_0 de (S_0) de la forme $t \mapsto Bt\sin(ct)$, pour une constante B à préciser. Déterminer l'unique solution x_0 de (S_0) telle que $x_0(0) = 0 = x_0'(0)$.

   On rappelle que lorsque h tend vers 0, on a $\sqrt{1-h} = 1 - \dfrac{h}{2} + O(h^2) = 1 + O(h)$, et de même $(1-h)^{-1/2} = 1 + O(h)$. Comme $\sigma = c\left(1 - \dfrac{b^2}{c^2}\right)^{1/2}$ alors, lorsque b tend vers 0 on a : $\sigma = c + O(b^2)$ et $\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{c} + O(b^2)$.

   Fixons désormais un réel t et posons $h = \sigma t - ct$. Alors $\sigma t = ct + h$ et l'on a

   $$\sin(\sigma t) = \sin(ct)\cos(h) + \cos(ct)\sin(h)$$

   avec $h = O(b^2)$ lorsque $b \to 0$.
6. En utilisant le développement limité en 0 de cos et sin à l'ordre 1, et de exp à l'ordre 2, montrer que $\sin(\sigma t) = \sin(ct) + O(b^2)$ puis que

   $$e^{-bt}\frac{\sin(\sigma t)}{\sigma} = (1 - bt)\frac{\sin(ct)}{c} + O(b^2).$$

   Montrer alors (t étant fixé) que $\lim_{b\to 0}\big(x_b(t) - x_0(t)\big) = 0$.

Exercice 2. Soient $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \arctan(y) - \dfrac{1}{x}$. On considère l'équation différentielle :

$$(*) \qquad y'(t) = \arctan(y(t)) - \frac{1}{t}.$$

avec la condition initiale $y(1) = b$, où b est un réel.

1. Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Sont-elles continues sur U ?
2. Citer un théorème du cours qui assure qu'il existe une unique solution maximale (J_b, y_b) vérifiant $y_b(1) = b$, où J_b est un intervalle ouvert contenant 1.
3. Soient B, S les fonctions $[1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définies par $B(t) = b - \big(\frac{\pi}{2} + 1\big)(t-1)$ et $S(t) = b + \frac{\pi}{2}(t-1)$. Montrer que B (resp. S) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour $(*)$. En déduire que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'extrémité supérieure de J_b est $+\infty$.
4. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\beta(t) = b - \frac{\pi}{2}(t-1) - \log(t)$ et $\gamma(t) = b + \frac{\pi}{2}(t-1) - \log(t)$. Montrer que β (resp. γ) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que $\gamma(t) < y_b(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in J_b$ tel que $t < 1$. En déduire que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'extrémité inférieure de J_b est 0 et que $\lim_{t \to 0^+} y_b(t) = +\infty$. (On pourra utiliser le théorème de l'entonnoir pour les temps décroissants.)
5. Soit $\mathcal{C}_0$ l'isocline de pente 0, i.e. $\mathcal{C}_0 = \{(t, y) \in U \mid f(t, y) = 0\}$. Déterminer $\mathcal{C}_0$ et montrer que c'est une barrière inférieure forte pour $(*)$ sur $]2/\pi, +\infty[$. Montrer également que la fonction nulle est une barrière supérieure forte pour $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. On pose $A = \{(x, y) \in U \mid x > 2/\pi,\ 0 \leq y \leq \tan(1/t)\}$. Montrer qu'il existe un unique $\overline{b} \in \mathbb{R}$ tel que $(t, y_{\overline{b}}(t)) \in A$ pour tout $t > 2/\pi$.
7. Montrer que si $b > \overline{b}$, il existe $T > 2/\pi$ tel que $y_b(t) > \tan(1/t)$ et $y_b'(t) > 0$ pour tout $t > T$. En déduire que y_b tend en $+\infty$ vers une limite $L \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, puis montrer que $L = +\infty$. (Raisonner par l'absurde en supposant L finie pour obtenir une contradiction.)
8. Montrer de même que si $b < \overline{b}$ alors $\lim_{t \to +\infty} y_b(t) = -\infty$.
9. Tracer l'allure de l'isocline $\mathcal{C}_0$ et de plusieurs solutions y_b, illustrant les trois comportements décrits plus haut selon que b est égal, strictement supérieur, ou strictement inférieur à $\overline{b}$.