CHAPITRE 2

FONCTIONS COMPLEXES, ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

2.1. Fonctions dérivables à valeurs complexes

On rappelle que tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de façon unique $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que a est la *partie réelle* de z, notée $\mathcal{R}e(z)$, et que b est la *partie imaginaire* de z, notée $\mathcal{I}m(z)$. On a donc $z = \mathcal{R}e(z) + i\,\mathcal{I}m(z)$. Attention ! La partie $\mathcal{I}m(z)$ égale b, et non ib.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et f une application $I \to \mathbb{C}$. Pour tout $t \in I$, on peut écrire $f(t) = a(t) + ib(t)$, où $a(t) = \mathcal{R}e(f(t))$ et $b(t) = \mathcal{I}m(f(t))$. Ceci définit deux applications $a, b : I \to \mathbb{R}$. On écrira $a = \mathcal{R}e(f)$ et $b = \mathcal{I}m(f)$ et l'on dira que a (resp. b) est la partie réelle (resp. imaginaire) de f.

***Définition 2.1* (Fonctions dérivables $I \to \mathbb{C}$).** — Soit $t_0 \in I$.

(1) On dit que f est *dérivable* en t_0 si a et b le sont. Dans ce cas, on pose $f'(t_0) = a'(t_0) + ib'(t_0)$.

(2) On dit que f est *dérivable* sur I si elle l'est en tout point de I.

(3) Remarquons que si f est dérivable sur I et si $0 = f'(t) = a'(t) + ib'(t)$ pour tout $t \in I$, alors a (resp. b) est la fonction constante de valeur $a_0 = a(t_0)$ (resp. $b_0 = b(t_0)$), donc f est la fonction constante de valeur complexe $a_0 + ib_0$.

On a de plus les propriétés suivantes, qui se déduisent facilement des propriétés analogues, déjà vues, pour les fonctions réelles dérivables.

***Proposition 2.2*.** — *Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables et soit $\gamma \in \mathbb{C}$.*

(i) *La fonction $\gamma f + g$ est dérivable, de dérivée $\gamma f' + g'$.*

(ii) *L'ensemble $\mathscr{D}(I, \mathbb{C})$ des fonctions dérivables $I \to \mathbb{C}$ est un sev du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ de toutes les fonctions $I \to \mathbb{C}$, et l'application $D : \mathscr{D}(I, \mathbb{C}) \to \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$, $f \mapsto f'$ est linéaire.*

(iii) *La fonction fg est dérivable, de dérivée $f'g + fg'$.*

Démonstration. — Il résulte aussitôt des définitions que si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + g$ est dérivable, de dérivée $\alpha f' + g'$. Pour la suite de la démonstration, écrivons $f = a + ib$, avec $a = \mathcal{R}e(f)$ et $b = \mathcal{I}m(f)$.

Alors, on a $\boxed{(if)' = (-b + ia)' = -b' + ia' = i(a' + ib') = if'}$. En écrivant $\gamma = \alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on obtient donc que

$$(\gamma f)' = (\alpha f + \beta i f)' = \alpha f' + \beta (if)' = \alpha f' + \beta i f' = \gamma f'.$$

Ceci prouve (i), et le point (ii) n'est qu'une reformulation de (i).

Prouvons (iii). Si r est une fonction dérivable $I \to \mathbb{R}$, alors $rf = ra + irb$ d'où

$$(rf)' = (ra)' + i(rb)' = r'a + ra' + i(r'b + rb') = r'(a + ib) + r(a' + ib') = r'f + rf'.$$

En écrivant $g = r + is$, avec $r = \mathcal{R}e(f)$ et $s = \mathcal{I}m(f)$, on obtient alors, en utilisant le point (i) :

$$(gf)' = (rf + isf)' = r'f + rf' + i(s'f + sf') = (r' + is')f + (r + is)f' = g'f + gf'.$$

La proposition est démontrée. □

Définition 2.3 **(Primitives d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$).** — Soit $f(t) = a(t) + ib(t)$ une application $I \to \mathbb{C}$. Une application $F : I \to \mathbb{C}$ est une *primitive* de f sur I si elle est dérivable de dérivée f. Si on écrit $F(t) = A(t) + iB(t)$, ceci équivaut à dire que A (resp. B) est une primitive de a (resp. b) sur I. Si G est une autre primitive de f sur I alors, d'après le point (3) de 2.1, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $G = c + F$.

2.2. Primitivation par parties et primitives de $e^{ax}e^{ibx}P(x)$

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide, $x_0 \in I$ et $h : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Vous avez vu en Terminale (et nous verrons dans ce cours) que la fonction $H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)dt$ est une primitive de h sur I, et que toute primitive de h sur I est de la forme $H + c$, pour un réel c. Pour cette raison, on désignera par $\int h$ une primitive quelconque de h sur I et le procédé décrit ci-dessous est appelé « Intégration par parties » (IPP en abrégé) au lieu de « Primitivation par parties ».

Soit donné un produit $h = fg$ de fonctions continues sur I, et supposons qu'on connaisse déjà une primitive F de f sur I. La formule $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$ donne alors $fg = (Fg)' - Fg'$ donc si on connaît une primitive $\int Fg'$ de Fg' sur I, alors $H = Fg - \int Fg'$ sera une primitive de fg sur I. Illustrons ceci par l'exemple suivant.

(I) Cherchons une primitive de $e^{ax}P(x)$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ est un polynôme de degré $d \geq 1$. Soient $f(x) = e^{ax}$, $g(x) = P(x)$ et $k = 1/a$. Alors une primitive de f est $F(x) = ke^{ax}$ donc on a :

$$\int e^{ax}P(x) = ke^{ax}P(x) - \int F(x)P'(x) = ke^{ax} - k\int e^{ax}P'(x) \tag{1}$$

donc le calcul d'une primitive de $e^{ax}P(x)$ est ramené à celui d'une primitive de $e^{ax}P'(x)$, où maintenant P' est un polynôme de degré $d-1$. On peut répéter l'opération : on a $\int e^{ax}P'(x) = ke^{ax}P'(x) - k\int e^{ax}P''(x)$ et donc

$$\int e^{ax}P(x) = ke^{ax}P(x) - k^2e^{ax}P'(x) + k^2\int e^{ax}P''(x). \tag{2}$$

En répétant d fois ce processus, on obtient que

$$\int e^{ax}P(x) = ke^{ax}\Big(P(x) - kP'(x) + k^2P''(x) - \cdots + (-k)^{d-1}P^{(d-1)}(x)\Big) + (-k)^d\int e^{ax}P^{(d)}(x),$$

et comme $P^{(d)}(x)$ est une constante (puisque $\deg(P) = d$), alors une primitive de $e^{ax}P^{(d)}(x)$ est $ke^{ax}P^{(d)}(x)$. L'égalité précédente démontre donc la première partie de la proposition suivante :

Proposition 2.4. — *Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré $d \geq 1$.*

(i) *Les primitives sur $\mathbb{R}$ de $h(x) = e^{ax}P(x)$ sont les fonctions $H(x) = c + e^{ax}Q(x)$, où c est un réel arbitraire et $Q(x)$ est le polynôme $k\big(P(x) - kP'(x) + \cdots + k^dP^{(d)}(x)\big)$, qui est également de degré d.*

(ii) *Comme $(e^{ax}Q(x) + c)' = e^{ax}(aQ(x) + Q'(x))$, Q est déterminé par l'égalité $aQ + Q' = P$, donc si $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$, on cherche Q sous la forme $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_dx^d$, où les $b_i \in \mathbb{R}$ sont des coefficients inconnus que l'on détermine en écrivant que $Q'(x) + aQ(x) = (b_1 + ab_0) + (2b_2 + ab_1)x + \cdots + (db_d + ab_{d-1})x^{d-1} + ab_dx^d = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$. Donc, en posant $k = 1/a$, on obtient : $b_d = ka_d$, puis $b_{d-1} = k(a_{d-1} - db_d) = ka_{d-1} - k^2da_d$, etc.*

(II) Cherchons maintenant une primitive de $e^{ax}\cos(bx)$, où $a, b \in \mathbb{R}^*$. On pourrait faire deux IPP successives : en posant $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = \cos(bx)$, une primitive de f est $(1/a)f$ et l'on a $g' = -b\sin(bx)$, d'où $\int e^{ax}\cos(bx) = (1/a)e^{ax}\cos(bx) + (b/a)\int e^{ax}\sin(bx)$, puis en posant $v(x) = \sin(bx)$ on a $v'(x) = b\cos(bx)$ d'où $\int e^{ax}\sin(bx) = (1/a)e^{ax}\sin(bx) - (b/a)\int e^{ax}\cos(bx)$, et l'on obtient l'égalité

$$\int e^{ax}\cos(bx) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos(bx),$$

d'où $\frac{a^2+b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos(bx) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin(bx)$. Donc les primitives sur $\mathbb{R}$ de $e^{ax}\cos(bx)$, où $a, b \in \mathbb{R}^*$, sont les fonctions : $\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\big) + c$.

Montrons que l'on peut obtenir ceci de façon plus rapide en utilisant les nombres complexes. Rappelons que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on pose : $\boxed{e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)}$. Il résulte des formules trigonométriques :

$$\boxed{\cos(y+y') = \cos(y')\cos(y) - \sin(y')\sin(y)} \qquad \boxed{\sin(y+y') = \sin(y')\cos(y) + \cos(y')\sin(y)}$$

que l'on a : $\boxed{e^{iy}e^{iy'} = e^{i(y+y')}}$ pour tout $y, y' \in \mathbb{R}$. Puis, on pose $\boxed{e^{x+iy} = e^x e^{iy}}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, où e^x désigne l'exponentielle réelle usuelle. Il résulte de ce qui précède que pour tout $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{e^{z+z'} = e^z e^{z'}}$. De plus, on a l'importante proposition suivante (le point (ii) sera utilisé au parag. 2.3.2) :

(Q) ***Proposition 2.5***. — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Posons $z = a + ib$ et considérons la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto h(t) = e^{zt} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}\big(\cos(bt) + i\sin(bt)\big)$.*

(1) *h est dérivable, et $h'(t) = (a + ib)h(t) = zh(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

(2) *Les fonctions complexes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ solutions de l'équation différentielle $f'(t) = zf(t)$ sont les fonctions $f(t) = Ce^{zt}$, où $C \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. — (i) D'après la définition 2.1, la fonction $g(t) = e^{ibt} = \cos(bt) + i\sin(bt)$ est dérivable, de dérivée $-b\sin(bt) + ib\cos(bt) = ibg(t)$. Par conséquent, la fonction $h(t) = e^{at}g(t)$ est dérivable, de dérivée $ae^{at}g(t) + e^{at}ibg(t) = (a + ib)h(t) = zh(t)$.

Prouvons (ii). Les fonctions Ce^{zt} sont solutions, d'après (i). Réciproquement, soit f une solution. Alors la fonction complexe $k(t) = f(t)e^{-zt}$ est dérivable, de dérivée $k'(t) = zf(t)e^{-zt} - f(t)ze^{-zt} = 0$, donc $k(t)$ et une constante $C \in \mathbb{C}$, et donc $f(t) = Ce^{zt}$. La proposition est démontrée. □

Revenons au calcul d'une primitive de $e^{at}\cos(bt)$. Si $b = 0$, on trouve immédiatement une primitive de e^{at}, donc le cas « intéressant » est lorsque $b \neq 0$. Dans ce cas, une primitive de $h = e^{at}e^{ibt}$ est la fonction complexe $H(t) = \dfrac{1}{a+ib}e^{at}e^{ibt}$. Ses parties réelle et imaginaire sont données par :

$$H(t) = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{at}\big(\cos(bt) + i\sin(bt)\big) = \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\Big[\big(a\cos(bt) + b\sin(bt)\big) + i\big(-b\cos(bt) + a\sin(bt)\big)\Big].$$

Alors la partie réelle (resp. imaginaire) de H est une primitive de la partie réelle $e^{at}\cos(bt)$ (resp. la partie imaginaire $e^{at}\sin(bt)$) de $h(t) = e^{at}e^{ibt}$. On a donc obtenu le point (i) de la proposition suivante :

Proposition 2.6. — *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.*

(i) *Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction complexe $e^{at}\big(\cos(bt) + i\sin(bt)\big)$ sont les fonctions complexes $c + \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}e^{at}e^{ibt}$, où $c \in \mathbb{C}$. En prenant les parties réelles et imaginaires, ceci donne les primitives de $e^{at}\cos(bt)$ et de $e^{at}\sin(bt)$.*

(ii) *Plus généralement, soit $P(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_dt^d \in \mathbb{R}[t]$ un polynôme de degré $d \geq 1$. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction complexe $h(t) = e^{at}P(t)\big(\cos(bt) + i\sin(bt)\big)$ sont les fonctions complexes $c + e^{at}e^{ibt}Q(t)$, où $c \in \mathbb{C}$ et $Q(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_dt^d \in \mathbb{C}[t]$ est le polynôme déterminé par l'égalité $(a+ib)Q + Q' = P$, c.-à-d., en posant $k = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$, on a : $b_d = ka_d$, puis $b_{d-1} = k(a_{d-1} - db_d) = ka_{d-1} - k^2da_d$, etc. En prenant les parties réelles et imaginaires, ceci donne les primitives de $e^{at}P(t)\cos(bt)$ et de $e^{at}P(t)\sin(bt)$.*

Démonstration de (ii). — Si $Q(t)$ est un polynôme complexe, la fonction $e^{at}e^{ibt}Q(t)$ a pour dérivée $e^{at}e^{ibt}\big((a+ib)Q(t)+Q'(t)\big)$ donc c'est une primitive de $h(t)$ si et seulement si Q vérifie l'équation $(a+ib)Q+Q'=P$. Comme $z_0=a+ib\neq 0$ ceci entraîne que Q est de même degré que P ; écrivant alors $Q(t)=b_0+b_1t+\cdots+b_dt^d$, on voit que les b_i sont uniquement déterminés par les a_i : notant $k=1/z_0$, on a $b_d=ka_d$, puis $b_{d-1}=k(a_{d-1}-db_d)=ka_{d-1}-k^2da_d$, etc. Enfin, comme deux primitives de h sur $\mathbb{R}$ ne diffèrent que par une constante $c\in\mathbb{C}$, on obtient bien que toutes les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $c+e^{at}e^{ibt}Q(t)$. □

2.3. Équations différentielles linéaires à coefficients constants

2.3.1. Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants. — Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Rappelons les résultats vus en 1M001 sur l'équation différentielle

$$x'(t)-\lambda x(t)=g(t), \tag{†}$$

où $g(t)$ est une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Ceci équivaut à $e^{-\lambda t}(x'(t)-\lambda x(t))=e^{-\lambda t}g(t)$ et l'on reconnaît dans le membre de gauche la dérivée de $e^{-\lambda t}x(t)$. D'autre part, la fonction $h(t)=e^{-\lambda t}g(t)$ étant continue sur I, la théorie de l'intégration (qu'on verra plus tard) nous assure qu'elle admet des primitives sur I. Si l'on fixe $t_0\in I$, l'une d'elles est $H(t)=\int_{t_0}^{t}g(u)du$, et toute autre primitive est de la forme $c+H$, avec $c\in\mathbb{R}$. (Et donc H est *la* primitive de h qui s'annule en t_0.)

Donc, les solutions de (†) sont les fonctions $x(t)=e^{\lambda t}(H(t)+c)=e^{\lambda t}H(t)+ce^{\lambda t}$. Une telle solution est entièrement déterminée par la donnée de sa valeur initiale $x_0=x(t_0)$ car on a $c=e^{-\lambda t_0}x_0$ (compte tenu de $H(t_0)=0$). Le slogan à retenir est donc : « chaque solution x de (†) est déterminée par sa valeur initiale $x(t_0)$, qui peut être choisie arbitrairement ».

Si $g(t)=e^{\mu t}P(t)$, où $\mu\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}[t]$ est un polynôme de degré $d\geq 0$, il s'agit donc de trouver les primitives de $h(t)=e^{(\mu-\lambda)t}P(t)$. Il y a deux cas. Si $\mu=\lambda$, alors $h(t)=P(t)$ et les primitives sont des polynômes de degré $d+1$: on peut les écrire sous la forme $H=Q+c$, où Q est l'unique polynôme tel que $Q'=P$ et $Q(0)=0$ (si $P=\sum_{i=0}^d a_it^i$ alors $Q(t)=\sum_{i=0}^d a_i\dfrac{t^{i+1}}{i+1}$). Si $a=\mu-\lambda\neq 0$, on a vu dans la Prop. 2.4 que les primitives sur $\mathbb{R}$ de $e^{at}P(t)$ sont les fonctions $H(t)=c+e^{at}Q(t)$, où c est un réel arbitraire et $Q(t)\in\mathbb{R}[t]$ est le polynôme déterminé par l'égalité $aQ+Q'=P$. On peut englober le cas où $g(t)$ égale $e^{\mu t}P(t)\cos(bt)$ ou $e^{\mu t}P(t)\sin(bt)$, pour un réel $b\neq 0$, en considérant ceci comme la partie réelle ou imaginaire de $e^{\mu t}e^{ibt}P(t)$. Posant $a=\mu-\lambda$ on sait, d'après la Prop. 2.6, que les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $e^{at}e^{ibt}P(t)$ sont les fonctions $H(t)=c+e^{at}e^{ibt}Q(t)$, où $c\in\mathbb{C}$ et $Q(t)\in\mathbb{C}[t]$ est le polynôme déterminé par l'égalité $(a+ib)Q+Q'=P$. Dans tous les cas, la solution générale de (†) est de la forme $x(t)=e^{\lambda t}H(t)$ et l'on a donc démontré la proposition suivante :

(Q) ***Proposition 2.7.*** — *Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{C}$ et $g(t)=e^{zt}P(t)$, où $P\in\mathbb{R}[t]$ est un polynôme $\neq 0$. La solution générale de l'équation différentielle $x'(t)-\lambda x(t)=\mathcal{R}e(g(t))$ ou $\mathcal{I}m(g(t))$ est la partie réelle ou imaginaire des fonctions suivantes, où $c\in\mathbb{C}$ est une constante :*

$$\begin{cases} e^{zt}Q(t)+ce^{\lambda t} & \text{si } z=\lambda, \text{ où } Q\in\mathbb{R}[t] \text{ est déterminé par } Q'=P \text{ et } Q(0)=0. \text{ On a } \\ & \deg(Q)=\deg(P)+1. \\ e^{zt}Q(t)+ce^{\lambda t} & \text{si } z\neq\lambda, \text{ où } Q\in\mathbb{C}[t] \text{ est déterminé par } (z-\lambda)Q+Q'=P. \text{ On a } \\ & \deg(Q)=\deg(P) \text{ et l'on a } Q\in\mathbb{R}[t] \text{ si } z\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

2.3.2. Équations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants. — Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$x''(t)+ax'(t)+bx(t)=0. \tag{$*$}$$

La fonction nulle est solution, et si $x_1,x_2\in E$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, on voit que αx_1+x_2 est aussi solution, car $(\alpha x_1+x_2)'=\alpha x_1'+x_2'$ et $(\alpha x_1+x_2)''=\alpha x_1''+x_2''$. Donc E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications deux fois dérivables $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

On associe à $(*)$ le polynôme $\mathrm{P} = X^2 + aX + b$. Soient λ, μ ses deux racines dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement distinctes). Comme $(X-\lambda)(X-\mu) = X^2 - (\lambda+\mu)X + \lambda\mu = X^2 - sX + p$, où s (resp. p) désigne la somme (resp. produit) des racines, on obtient les formules (à connaître !) : $\boxed{a = -s = -(\lambda+\mu)}$ et $\boxed{b = p = \lambda\mu}$.

Bien qu'on s'intéresse a priori aux solutions réelles de (†), il sera utile, comme dans les paragraphes précédents, de chercher les solutions complexes $z(t) = x_1(t) + ix_2(t)$, où x_1, x_2 sont des fonctions réelles. Comme $z'' + az' + bz = (x_1'' + ax_1' + bx_1) + i(x_2'' + ax_2' + bx_2)$, on voit qu'une telle fonction z est une solution complexe de (†) si et seulement si x_1 et x_2 en sont des solutions réelles. Notons $E_{\mathbb{C}}$ l'ensemble des solutions complexes, on voit comme plus haut que c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Lemme 2.8. — *Les fonctions $f(t) = e^{\lambda t}$ et $e^{\mu t}$ sont solutions de (†).*

Démonstration. — $f''(t) + af'(t) + bf(t) = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0$ puisque λ est racine de P. Et idem bien sûr pour $e^{\mu t}$. □

(Q) ***Théorème 2.9***. — *E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $E_{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2. Plus précisément :*

(i) Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors une base (f, g) de E est donnée par $f(t) = e^{\lambda t}$, $g(t) = e^{\mu t}$ si $\mu \neq \lambda$, et $f(t) = e^{\lambda t}$, $g(t) = te^{\lambda t}$ si $\mu = \lambda$. Ces fonctions forment aussi une base de $E_{\mathbb{C}}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, i.e. toute fonction $h \in E_{\mathbb{C}}$ s'écrit de façon unique $h = vf + ug$, avec $u, v \in \mathbb{C}$.

(ii) Si $\lambda = \gamma + i\omega$ avec $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$ et $\omega \neq 0$, alors $\mu = \gamma - i\omega$. Une base (f, g) de $E_{\mathbb{C}}$ est donnée par $f(t) = e^{\lambda t} = e^{\gamma t}e^{i\omega t}$ et $g(t) = e^{\mu t} = e^{\gamma t}e^{-i\omega t}$, une autre base (h, k) de $E_{\mathbb{C}}$ est formée des fonctions réelles $h(t) = e^{\gamma t}\cos(\omega t)$ et $k(t) = e^{\gamma t}\sin(\omega t)$. Ces fonctions forment aussi une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, i.e. toute fonction $p \in E$ s'écrit de façon unique $p = uh + vk$, avec $u, v \in \mathbb{R}$.

Le point-clé de la démonstration est le lemme suivant.

Lemme 2.10. — *Soit $z(t)$ une solution complexe de $(*)$. Écrivons $z(t) = e^{\lambda t}\varphi(t)$. Alors :*

(1) $\varphi'' + (\lambda - \mu)\varphi' = 0$, et donc $\varphi'(t) = Ce^{(\mu-\lambda)t}$ pour un certain $C \in \mathbb{C}$.

(2) Si $\mu = \lambda$, on a donc $\varphi(t) = ut + v$, avec $u, v \in \mathbb{C}$, d'où $z(t) = ute^{\lambda t} + ve^{\lambda t}$.

(3) Si $\mu \neq \lambda$, on a donc $\varphi(t) = ue^{(\mu-\lambda)t} + v$, avec $u, v \in \mathbb{C}$, d'où $z(t) = ue^{\mu t} + ve^{\lambda t}$.

Démonstration. — On a $z'(t) = e^{\lambda t}\big(\lambda\varphi(t) + \varphi'(t)\big)$ et $z''(t) = e^{\lambda t}\big(\lambda^2\varphi(t) + 2\lambda\varphi'(t) + \varphi''(t)\big)$, d'où

$$\begin{aligned} 0 = z''(t) + az'(t) + bz(t) = e^{\lambda t}\Big[P(\lambda)\varphi(t) + (2\lambda + a)\varphi'(t) + \varphi''(t)\Big] \\ = e^{\lambda t}\Big[\varphi''(t) + (\lambda - \mu)\varphi'(t)\Big], \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de $P(\lambda) = 0$ et $a = -\lambda - \mu$. On a donc $\varphi''(t) + (\lambda - \mu)\varphi'(t) = 0$. D'après le point (ii) de la Prop. 2.5, on a donc $\varphi'(t) = Ce^{(\mu-\lambda)t}$ pour un certain $C \in \mathbb{C}$. Ceci prouve (1).

Si $\mu = \lambda$, alors d'une part $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'autre part, posant $u = C$ on a $\varphi'(t) = u$ d'où $\varphi(t) = ut + v$, avec $u, v \in \mathbb{C}$. Donc $z(t) = ute^{\lambda t} + ve^{\lambda t}$, et de plus cette écriture est unique car les fonctions $f(t) = e^{\lambda t}$ et $g(t) = te^{\lambda t}$ sont linéairement indépendantes. Ceci montre que (f, g) forme une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_{\mathbb{C}}$. De plus, si la solution z est à valeurs réelles alors les égalités $z(0) = v$ et $z(1) = (u + v)e^{\lambda}$ donnent que $v = z(0)$ et $u = z(1)e^{-\lambda} - v$ sont réels. Ceci montre que les fonctions réelles f et g forment une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Ceci prouve (2), ainsi qu'une partie du point (i) du théorème.

Supposons désormais que $\alpha = \mu - \lambda$ soit $\neq 0$. Alors $\varphi'(t) = Ce^{(\mu-\lambda)t}$ entraîne que $\varphi(t) = ue^{(\mu-\lambda)t} + v$, où $u = C/\alpha$ et $v \in \mathbb{C}$ est arbitraire. Donc $z(t) = e^{\lambda t}\varphi(t)$ égale $ue^{\mu t} + ve^{\lambda t}$, ce qui prouve (3). De plus cette écriture est unique car les fonctions $f(t) = e^{\lambda t}$ et $g(t) = e^{\mu t}$ sont linéairement indépendantes. Ceci montre que (f, g) forme une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$, qui est donc de dimension 2.

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors les fonctions f, g sont réelles, et si $z = vf + ug$ est à valeurs réelles, alors on déduit des égalités : $z(0) = v + u$, $z(1) = ve^{\lambda} + ue^{\mu}$ que $u(e^{\mu} - e^{\lambda}) = z(1) - z(0)e^{\lambda}$ et $v(e^{\lambda} - e^{\mu}) = z(1) - z(0)e^{\mu}$, ce qui entraîne que les coefficients u, v sont réels. Ceci montre que dans ce cas (f, g) est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Ceci achève la preuve du point (i) du théorème.

Enfin, si $\lambda = \gamma + i\omega$ avec $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$ et $\omega \neq 0$, alors les fonctions réelles $h(t) = e^{\gamma t}\cos(\omega t)$ et $k = e^{\gamma t}\sin(\omega t)$ engendrent aussi $E_{\mathbb{C}}$, puisque $f = h + ik$ et $g = h - ik$. Comme $\dim_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}} = 2$, on en déduit que (h, k) est une base de $E_{\mathbb{C}}$. Enfin, si $z = uh + vk$ est à valeurs réelles, alors pour $t = 0$ on obtient $z(0) = u$ donc $u \in \mathbb{R}$, et pour $t_0 = \pi/2\omega$ on obtient $z(t_0) = ve^{\gamma t_0}$ donc $v = z(t_0)e^{-\gamma t_0} \in \mathbb{R}$. Ceci montre que (h, k) est aussi une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Ceci prouve le point (ii) du théorème. $\square$

Maintenant, soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $g : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Soit $\mathscr{D}^2(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables $I \to \mathbb{R}$ et définissons de même le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{D}^2(I, \mathbb{C})$. Soit $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$) l'ensemble des fonctions $x \in \mathscr{D}^2(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{D}^2(I, \mathbb{C})$) qui sont solutions de l'équation différentielle avec second membre :

$$(**) \qquad x''(t) + ax'(t) + bx(t) = g(t).$$

Comme précédemment, pour trouver des solutions réelles, il sera utile de chercher des solutions complexes $z(t) = x_1(t) + ix_2(t)$, où x_1, x_2 sont des fonctions $I \to \mathbb{R}$. Comme g est réelle, on voit qu'une telle fonction z est solution de $(**)$ si et seulement si x_1 et x_2 en sont des solutions réelles. Ceci montre que pour trouver une solution réelle, il suffit de trouver une solution complexe et de prendre sa partie réelle. De plus, on va voir dans le théorème ci-dessous que si on connaît *une* solution de $(**)$, alors on les connaît toutes. Avant d'énoncer le théorème, introduisons les définitions suivantes.

Définition 2.11. — Soient V, W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\phi : V \to W$ une application linéaire. On note $\mathrm{Im}(\phi)$ l'ensemble des images $\phi(x)$, lorsque x parcourt V. C'est un sev de W. En effet, $0_W = \phi(0_V) \in \mathrm{Im}(\phi)$ et si $t \in \mathbb{K}$ et $y, y' \in \mathrm{Im}(\phi)$, il existe $x, x' \in V$ tels que $\phi(x) = y$ et $\phi(x') = y'$; comme ϕ est linéaire on a $\phi(tx + x') = t\phi(x) + \phi(x') = ty + y'$, ce qui montre que $ty + y' \in \mathrm{Im}(\phi)$.

***Définition 2.12* (Sous-espaces affines d'un espace vectoriel)**
Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E un sev de V. Soit $\mathscr{E}$ un sous-ensemble de V. On dit que $\mathscr{E}$ est un *sous-espace affine* de V *de direction* E s'il vérifie les trois conditions suivantes :

(1) $\mathscr{E}$ est non vide.

(2) Pour tout $x_0, x_1 \in \mathscr{E}$, on a $x_1 - x_0 \in E$.

(3) Réciproquement, pour tout $x_0 \in \mathscr{E}$ et $f \in E$, l'élément $x_1 = x_0 + f$ appartient à $\mathscr{E}$.

Par exemple, soit $\phi : V \to W$ une application linéaire et soit $w \in \mathrm{Im}(\phi)$. Alors l'ensemble $\mathscr{E}$ des antécédents de w par ϕ, i.e. l'ensemble des $v \in V$ tels que $\phi(v) = w$, est un sous-espace affine de V de direction $E = \mathrm{Ker}(\phi)$. En effet, par hypothèse $\mathscr{E}$ est non vide. Soient $x, x' \in \mathscr{E}$. Alors $\phi(x) = w = \phi(x')$ donc $0 = \phi(x') - \phi(x) = \phi(x' - x)$, donc $x' - x \in \mathrm{Ker}(\phi) = E$; réciproquement, si $f \in E$ alors $\phi(x + f) = \phi(x) + \phi(f) = \phi(x) = w$, donc $x + f \in \mathscr{E}$.

Exemple 2.13. — Considérons l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y - x$. L'ensemble des antécédents par ϕ de $1 \in \mathbb{R}$ est l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x = 1\} = \{(x, x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, 1) + x(1, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

i.e. c'est la droite affine $\mathscr{D}$ « passant par le point $A = (0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1, 1)$ ».

Proposition 2.14. — *Admettons pour un instant que $\mathscr{E}$ est non vide (voir le théorème suivant). Alors :*

(i) *$\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{D}^2(I, \mathbb{R})$ de direction E.*

(ii) *$\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{D}^2(I, \mathbb{C})$ de direction $E_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les applications $I \to \mathbb{R}$. Alors l'application $\phi : \mathscr{D}^2(I, \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, $x \mapsto x'' + ax' + bx$ est linéaire. De plus, $\mathrm{Ker}(\phi)$ égale E, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions réelles de $(*)$. Donc, si $g \in \mathrm{Im}(\phi)$ i.e. si $(**)$ possède au moins une solution x_0, alors d'après ce qu'on a dit en 2.12, $\mathscr{E} = \{x_0 + f \mid f \in E\}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{D}^2(I, \mathbb{R})$ de direction E. La démonstration est identique quand on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. $\square$

Théorème 2.15. — *L'équation différentielle* $(**)$ *admet au moins une solution complexe* z*, donc aussi une solution réelle* $x = \mathcal{R}e(z)$*.*

Démonstration. — On cherche $z(t)$ sous la forme $z(t) = e^{\lambda t}\varphi(t)$. Alors, comme dans le point (1) du lemme 2.10, on obtient que la fonction complexe $f(t) = \varphi'(t)$ vérifie l'équation différentielle du 1er ordre $f'(t) + (\lambda - \mu)f(t) = g(t)$. Posant $\alpha = \lambda - \mu$, ceci équivaut à :

$$(\ddagger) \qquad e^{\alpha t}\big(f'(t) + \alpha f(t)\big) = e^{\alpha t} g(t).$$

Les parties réelle et imaginaire de $h(t) = e^{\alpha t} g(t)$ sont continues, donc admettent des primitives sur I (d'après la théorie de l'intégration !) donc $h(t)$ admet des primitives sur I. Or, on reconnaît dans le membre de gauche de (‡) la dérivée de $e^{\alpha t} f(t)$. On déduit donc de (‡) que $e^{\alpha t} f(t) = H(t)$, où H est une primitive de h sur I. Donc $\varphi'(t) = f(t) = e^{-\alpha t} H(t)$. À nouveau, les parties réelle et imaginaire de $f(t)$ sont continues, donc admettent des primitives sur I donc $f(t)$ admet des primitives sur I. Il en résulte que $\varphi(t) = F(t)$, où F est une primitive de f sur I, et donc $z(t) = e^{\lambda t} F(t)$ est une solution de $(**)$. □

Le théorème précédent n'a pas été énoncé en cours, mais on a démontré en cours le théorème ci-dessous, qui traite le cas où $g(t) = ke^{\alpha t}\cos(\beta t)$, avec $k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, un cas qui se présente souvent dans les équations différentielles étudiées en physique.

(Q) ***Théorème 2.16.*** — *Soient* $a, b, \alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$ *et* $\nu = \alpha + i\beta$*. On considère l'équation différentielle réelle* $(**)$ *et sa variante complexe* $(***)$ *ci-dessous :*

$$(**) \qquad x''(t) + ax'(t) + bx(t) = ke^{\alpha t}\cos(\beta t) = k\,\mathcal{R}e(e^{\nu t})$$

$$(***) \qquad x''(t) + ax'(t) + bx(t) = k\,e^{\nu t}$$

et l'équation homogène associée $(*)$ $x'' + ax' + bx = 0$*. Soient* λ, μ *les racines dans* $\mathbb{C}$ *du polynôme* $P = X^2 + aX + b$*. Notons que* $P' = 2X + a$ *et* $P'' = 2$*.*

(i) *Une solution « particulière » complexe de* $(***)$ *est la fonction* $z_0(t)$ *donnée par :*

$$z_0(t) = \begin{cases} \dfrac{k}{P(\nu)} e^{\nu t} & \text{si } P(\nu) \neq 0, \\ \dfrac{k}{P'(\nu)} t e^{\nu t} & \text{si } \nu \text{ est racine simple de } P \text{ i.e. si } P(\nu) = 0 \neq P'(\nu), \\ \dfrac{k}{2} t^2 e^{\nu t} & \text{si } \nu = \lambda = \mu \text{ est racine double de } P. \end{cases}$$

(ii) *La fonction* $x_0(t) = \mathcal{R}e(z(t))$ *est donc une solution « particulière » réelle de* $(**)$*.*

(iii) *Les solutions réelles de* $(**)$ *sont toutes les fonctions* $x_0(t) + f(t)$ *où* $f(t)$ *est une solution réelle de l'équation homogène* $(*)$*.*[(1)]

Démonstration. — Cherchons une solution de $(***)$ sous la forme $z(t) = e^{\nu t}\varphi(t)$, avec φ « aussi simple que possible ». Notons $\phi(z) = z'' + az' + bz$. Le point-clé est que, reprenant le calcul de $\phi(z)$ fait dans la démonstration du lemme 2.10, on obtient que

$$\phi(z) = e^{\nu t}\Big[P(\nu)\varphi(t) + (2\nu + a)\varphi'(t) + \varphi''(t)\Big] = e^{\nu t}\Big[P(\nu)\varphi(t) + P'(\nu)\varphi'(t) + \varphi''(t)\Big].$$

Donc $\phi(z) = ke^{\nu t}$ si et seulement si $P(\nu)\varphi(t) + (2\nu + a)\varphi'(t) + \varphi''(t) = k$. Si $P(\nu) \neq 0$, on peut prendre pour φ une constante C, alors $\varphi' = 0 = \varphi''$ et l'on obtient $P(\nu)C = k$ d'où $C = k/P(\nu)$. Si $P(\nu) = 0 \neq P'(\nu)$, on peut prendre $\varphi(t) = Ct$, alors $\varphi' = C$ et $\varphi'' = 0$ et l'on obtient $P'(\nu)C = k$ d'où $C = k/P'(\nu)$. Enfin, si $P(\nu) = 0 = P'(\nu)$, on peut prendre $\varphi(t) = Ct^2$ et l'on obtient $\varphi''(t) = 2C = k$, d'où $C = k/2$. Ceci prouve (i). Le point (ii) en découle aussitôt en prenant les parties réelles. Enfin, (iii) a été démontré dans la proposition 2.14, en tenant compte de la définition 2.12. □

[(1)] Donc l'ensemble $\mathscr{E}$ des solutions réelles de $(**)$ est un sous-espace affine de $\mathscr{D}^2(X, \mathbb{R})$ de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des solutions réelles de l'équation homogène $(*)$.

Remarque 2.17. — La démonstration du théorème 2.16 s'applique dans le cas plus général où le second membre de $(***)$ est de la forme $R(t)e^{\nu t}$, pour un polynôme non nul $R(t) \in \mathbb{R}[t]$. En effet, on cherche une solution de $(***)$ de la forme $z(t) = e^{\nu t}Q(t)$ avec $Q(t) \in \mathbb{C}[t]$ un polynôme complexe. Le même calcul montre que $z(t)$ est solution si et seulement si l'on a :

$$(\star) \qquad P(\nu)Q(t) + P'(\nu)Q'(t) + Q''(t) = R(t)$$

et ceci détermine de façon unique un polynôme $Q(t) \in \mathbb{C}[t]$ qui est de degré $d = \deg(R)$ si $P(\nu) \neq 0$, et de degré $d+1$ (resp. $d+2$) si ν est racine simple (resp. double) de P. Si on écrit $Q = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ (où $n = d, d+1$ ou $d+2$) alors les b_i sont déterminés de proche en proche par l'égalité $(\star)$. Par exemple, si $P(\nu) \neq 0$ alors en posant $k = 1/P(\nu)$ on a : $b_d = ka_d$, puis $b_{d-1} = k(a_{d-1} - P'(\nu)db_d) = ka_{d-1} - k^2P'(\nu)da_d$, puis $b_{d-2} = k\big[a_{d-2} - P'(\nu)(d-1)b_{d-1} - d(d-1)b_d\big] = \cdots$

(Q) ***Définition 2.18*** **(Déterminants** 2×2**).** — Soient $\mathbb{K}$ un corps et $a, b, c, d, u, v \in \mathbb{K}$. On considère le système linéaire (avec second membre) :

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = u \\ cx_1 + dx_2 = v \end{cases}$$

où x_1, x_2 sont des inconnues dans $\mathbb{K}$. La *matrice* du système est $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et son *déterminant* est $D = ad - bc \in \mathbb{K}$. Si $D \neq 0$, alors le système admet une solution (x_1, x_2) *unique*. En effet, si l'on note L_1 (resp. L_2) la 1ère (resp. 2ème) ligne, alors en faisant $dL_1 - bL_2$ on obtient $Dx_1 = du - bv$, d'où $x_1 = (du - bv)/D$, et de même en faisant $aL_2 - cL_1$ on obtient $x_2 = (av - cu)/D$.

Proposition 2.19 **(Conditions initiales).** — *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Revenons à l'équation différentielle $(**)$ $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = g(t)$ et fixons $t_0 \in I$. Chaque solution x (réelle ou complexe) de $(**)$ est déterminée par ses « conditions initiales » $x_0 = x(t_0)$ et $v_0 = x'(t_0)$, qui peuvent être choisies arbitrairement dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration. — Faisons la démonstration lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ étant analogue. Soit $u(t)$ une solution fixée de $(**)$ et soit (f, g) une base de l'espace vectoriel $E_{\mathbb{K}}$ des solutions de l'équation homogène $x'' + ax' + bx = 0$. Alors, les solutions de $(**)$ sont les fonctions $x(t) = u(t) + c_1 f(t) + c_2 g(t)$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$. Étant donné $x_0, v_0 \in \mathbb{K}$, on se demande si on peut trouver c_1, c_2 tels que $x(t_0) = u_0$ et $x'(t_0) = v_0$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} f(t_0)\, c_1 + g(t_0)\, c_2 = x_0 - u(t_0) \\ f'(t_0) c_1 + g'(t_0) c_2 = v_0 - u'(t_0) \end{cases}$$

dont le déterminant est $D(t_0) = f(t_0)g'(t_0) - f'(t_0)g(t_0)$. Si $f(t) = e^{\lambda t}$ et $g(t) = e^{\mu t}$ avec $\mu \neq \lambda$, resp. si $g(t) = te^{\lambda t}$, alors la matrice du système est $\begin{pmatrix} e^{\lambda t_0} & e^{\mu t_0} \\ \lambda e^{\lambda t_0} & \mu e^{\mu t_0} \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} e^{\lambda t_0} & t_0 e^{\lambda t_0} \\ \lambda e^{\lambda t_0} & e^{\lambda t_0}(\lambda t_0 + 1) \end{pmatrix}$ et $D(t_0)$ égale $(\mu - \lambda)e^{\lambda t_0}e^{\mu t_0}$, resp. $e^{2\lambda t_0}$, qui est bien $\neq 0$. Donc, pour tout choix de « conditions initiales » (x_0, v_0), il existe une unique solution x de $(**)$ telle que $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = v_0$. □

2.4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Terminons ce chapitre avec les suites récurrentes linéaires, dont l'étude est analogue à celle des équations différentielles linéaires. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $g^\alpha = (\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison α et de terme initial $\alpha^0 = 1$.

Lemme 2.20. — *Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Alors les suites géométriques $u^1 = g^{a_1}, \dots, u^p = g^{a_p}$ sont linéairement indépendantes.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{S}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ et soit $T : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ l'application qui envoie toute suite $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $T(u)$ définie par $T(u)_n = u_{n+1}$, c.-à-d. $T(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$. On voit facilement que T est une application linéaire, donc un endomorphisme de $\mathscr{S}$. De plus, pour toute suite géométrique $g^\alpha = (1, \alpha, \alpha^2, \dots)$, on a $T(g^\alpha) = (\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots) = \alpha g^\alpha$, i.e. g^α est un *vecteur propre* de T pour la valeur propre α. Ceci va nous permettre de montrer le lemme par récurrence sur p.

Le lemme est vrai pour $p = 1$, car si $t_1 u^1 = 0$ alors $t_1 = 0$ puisque le terme initial de u^1 est 1. On peut donc supposer $p \geq 2$ et le lemme démontré pour $p - 1$. Considérons une relation de dépendance linéaire

$$(R) \qquad t_1 u^1 + \cdots + t_p u^p = 0$$

et appliquons lui l'endomorphisme $T - a_p \, \mathrm{id}_{\mathscr{S}}$. Comme $T(u^i) = a_i u^i$ pour tout i, on obtient

$$t_1(a_1 - a_p)u^1 + \cdots + t_{p-1}(a_{p-1} - a_p)u^p = 0$$

et donc par hypothèse de récurrence, $t_i(a_i - a_p) = 0$ pour $i = 1, \dots, p-1$, et comme $a_i \neq a_p$ ceci donne $t_i = 0$ pour $i = 1, \dots, p-1$. Injectant ceci dans (R), ceci donne $t_p u^p = 0$, d'où aussi $t_p = 0$. Ceci prouve que $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre. Le lemme est démontré. □

(Q) ***Théorème 2.21***. — *Soient $\mathbb{K}$ un corps, $a, b \in \mathbb{K}$ et $E = E(a,b)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ qui vérifient la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :*

$$(*) \qquad u_{n+2} - a u_{n+1} - b u_n = 0.$$

On considère le polynôme $P = X^2 - aX - b$.

(1) *E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est (e, f), où e (resp. f) désigne l'unique élément de E dont les deux premiers termes sont $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$).*

(2) *Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. La suite géométrique g^α appartient à E si et seulement si $P(\alpha) = 0$.*

(3) *Si P admet dans $\mathbb{K}$ deux racines $\lambda \neq \mu$, une autre base de E est formée des suites géométriques g^λ et g^μ.*

(4) *Si P admet dans $\mathbb{K}$ une racine double λ, une autre base de E est formée de la suite géométrique g^λ et de la suite h^λ définie par $h_0^\lambda = 0$ et $h_n^\lambda = n\lambda^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Noter que $h_1^\lambda = 1$. (Par commodité, on écrira que $h^\lambda = (n\lambda^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec la convention $(h_0, h_1) = (0, 1)$ pour tout λ, y compris si $\lambda = 0$.)*

Démonstration. — D'abord, E est un sev du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{S}$ de toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$: la suite nulle est dans E et si $t \in \mathbb{K}$ et u, v sont des éléments de E, on voit facilement que les suites $tu = (tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $(*)$, donc appartiennent à E.

Puis, pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, les deux premiers termes u_0 et u_1 peuvent être arbitraires, mais une fois qu'ils sont choisis la suite u est entièrement déterminée par la relation de récurrence $(*)$, puisque $u_2 = au_1 + bu_0$, puis $u_3 = au_2 + bu_1$, etc. On retiendra donc le slogan :

tout $u \in E$ est déterminé par ses termes (u_0, u_1), qui peuvent être choisis arbitrairement.

En particulier, E contient une unique suite $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(e_0, e_1) = (1, 0)$ et une unique suite $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f_0, f_1) = (0, 1)$. Ces deux suites engendrent E. En effet, pour $u \in E$ arbitraire, la suite $v = u - u_0 e - u_1 f$ vérifie $v_0 = 0 = v_1$, donc c'est la suite nulle (d'après le slogan précédent !). Comme $v = 0$ on a donc $u = u_0 e + u_1 f$, ce qui montre que (e, f) est une famille génératrice. C'est aussi une famille libre, car pour tout $x, y \in \mathbb{K}$, la suite $u = xe + yf$ vérifie $(u_0, u_1) = (x, y)$ donc on ne peut avoir $u = 0$ que si $x = 0 = y$. Ceci montre que (e, f) est une base de E, et donc E est de dimension 2.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Si la suite géométrique $g^\alpha = (\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E, alors pour $n = 0$ on obtient $\alpha^2 = u_2 = au_1 + bu_0 = a\alpha + b$ i.e. $P(\alpha) = 0$. Réciproquement, si $P(\alpha) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\alpha^{n+2} - a\alpha^{n+1} - b\alpha^n = \alpha^n P(\alpha) = 0$, donc $g^\alpha \in E$.

Si P admet dans $\mathbb{K}$ deux racines distinctes $\lambda \neq \mu$, alors les suites g^λ et g^μ appartiennent à E et comme elles forment une famille libre de cardinal 2 (d'après le lemme 2.20), elles forment une base de E.

Enfin, si P admet dans $\mathbb{K}$ une racine double λ, alors $P = (X - \lambda)^2 = X^2 - 2\lambda X + \lambda^2$ d'où $a = 2\lambda$ et $-b = \lambda^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$h_{n+2}^\lambda - a h_{n+1}^\lambda - b h_n^\lambda = (n+2)\lambda^{n+1} - 2\lambda(n+1)\lambda^n - \lambda^2 n \lambda^{n-1} = \lambda^{n+1}\big(n + 2 - 2(n+1) + n\big) = 0$$

donc $h^\lambda \in E$. Comme les termes initiaux de g^λ et h^λ sont $(1,\lambda)$ et $(0,1)$, si $xg^\lambda + yh^\lambda = 0$ alors on a $x = 0$ puis $y = 0$, donc (g^λ, h^λ) est une famille libre de cardinal 2, donc une base de E. □

Exercice 2.22. — Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$. Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Considérons maintenant le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et où le polynôme $P = X^2 - aX - b$ a deux racines complexes conjuguées non réelles.

(Q) ***Proposition 2.23.*** — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que le polynôme $P = X^2 - aX - b$ a deux racines complexes conjuguées non réelles, $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\mu = \alpha - i\beta$, avec $\beta \neq 0$. Notons E (resp. $E_\mathbb{C}$) l'ensemble des suites réelles (resp. complexes) $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0$.*

(1) *$E_\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est (g^λ, g^μ).*

(2) *E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 dont une base (R, I) est donnée par les suites $R_n = (\lambda^n + \mu^n)/2$ et $I_n = (\lambda^n - \mu^n)/2i$.*

Démonstration. — Comme $\lambda \neq \mu$, le point (i) découle du théorème 2.21 appliqué à $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (car $a, b \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Prouvons (ii).

Comme $\mu = \overline{\lambda}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\mu^n = \overline{\lambda^n}$ donc $R_n = \mathcal{R}e(\lambda^n)$ et $I_n = \mathcal{I}m(\lambda^n)$, d'où $\lambda^n = R_n + iI_n$ et $\mu^n = R_n - iI_n$. Il en résulte que les suites R et I engendrent le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_\mathbb{C}$, donc en forment une base, donc sont linéairement indépendantes. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Comme $E \subset E_\mathbb{C}$, on peut donc écrire de façon unique $u = xR + yI$, avec $x, y \in \mathbb{C}$, et il faut voir que $x, y \in \mathbb{R}$. Or comme $(R_0, R_1) = (1, \alpha)$ et $(I_0, I_1) = (0, \beta)$, on a $x = u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_1 = u_0\alpha + y\beta$ d'où $y = \beta^{-1}(u_1 - u_0\alpha) \in \mathbb{R}$. Ceci prouve que (R, I) est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. □

Exercice 2.24. — Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle vérifiant $u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = \cos(\theta)$.

(1) On suppose que $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$. Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Même question si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$.