Feuille d'exercices supplémentaire : exponentielle complexe.

Exercice 1 (Exponentielle complexe)**.** On « rappelle » que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(S_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

converge ; sa limite est notée $\exp(z)$. Noter que $\exp(0) = 1$. On admet les trois résultats suivants :

(a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.

(b) Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

(c) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(it)$ est dérivable, de dérivée $f'(t) = if(t)$.

Pour tout réel t, on note $\cos(t)$ et $\sin(t)$ les parties réelle et imaginaire de $\exp(it)$. D'après ce qui précède, on a :

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \sum_{n\geqslant 3} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \tag{†}$$

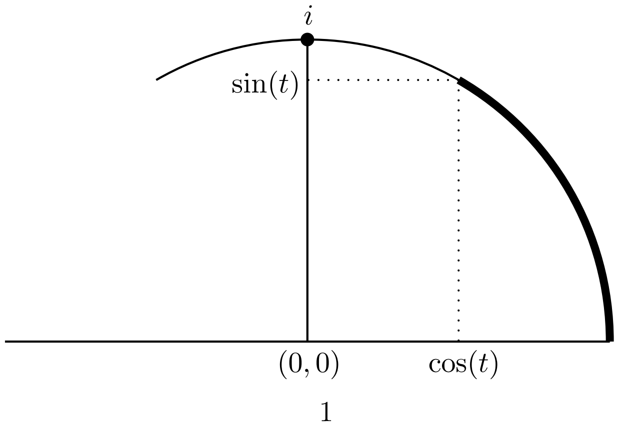
$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{‡}$$

et cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $\cos'(t) = -\sin(t)$ et $\sin'(t) = \cos(t)$.

1. Déduire de (a) et (b) que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\exp(it)| = 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 2]$ on a $\dfrac{t^n}{n!} > \dfrac{t^{n+2}}{(n+2)!}$.
3. En utilisant (†) et (‡), montrer que pour tout $t \in]0, 2]$ on a

$$\sin(t) \geqslant t - \frac{t^3}{6} > 0 \qquad \text{et} \qquad \cos(t) \leqslant 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}.$$

Par conséquent, la fonction cos décroît strictement sur $[0, 2]$. Donc pour tout $t \in [0, 2]$ la fonction cos est une bijection décroissante de $[0, t]$ sur $[\cos(t), 1]$, et donc l'image par $t \mapsto \exp(it)$ de $[0, t]$ est l'arc de cercle situé dans le demi-plan $y \geqslant 0$ **au-dessus** du segment $[\cos(t), 1]$, cf. la figure ci-dessous :



Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0,2]$ tel que $e^{i\alpha} = i$, puis que $t \mapsto \exp(it)$ est périodique de période 4α.

4. En utilisant ce qui précède, montrer que $\cos(2) < \dfrac{-1}{3} < 0$. En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in [0,2]$ tel que $\cos(\alpha) = 0$, et qu'alors on a :
   (a) $\sin(\alpha) = 1$ et donc $\exp(i\alpha) = i$.
   (b) L'image par $t \mapsto \exp(it)$ de $[0, \alpha]$ est le quart de cercle C joignant les nombres complexes 1 et i.
5. Montrer que $e^{4i\alpha} = 1$, puis que $\exp(i(t + 4\alpha)) = \exp(it)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $\beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\exp(i\beta) = 1$. Remplaçant β par $\beta - 4k\alpha$, où k est le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $4k\alpha \leqslant \beta$, on peut supposer que $0 \leqslant \beta < 4\alpha$. Posons alors $z = \exp(i\beta/4)$.

6. Montrer, d'une part, que $z \in \{\pm 1, \pm i\}$ et, d'autre part, que $\cos(\beta/4) > 0$. En déduire que $z = 1$, puis que $\beta = 0$.

Ce qui précède montre que la période de $i \mapsto \exp(it)$ est exactement 4α. On **définit** π par $2\pi = 4\alpha$, d'où $\alpha = \pi/2$.

7. Montrer que l'application $z \mapsto iz$, c.-à-d. $x + iy \mapsto -y + ix$ est une bijection de C sur le quart de cercle C' joignant i à -1. En particulier, on a $\exp(i\pi) = -1$.

On note D le demi-cercle supérieur et D' le demi-cercle inférieur.

8. En utilisant que $D' = \{-z \mid z \in D\}$, montrer que l'application $t \mapsto \exp(it)$ est un morphisme de groupes **surjectif** de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité S^1, et que son noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$.
9. Montrer que tout $z \in \mathbb{C}^\times$ s'écrit sous la forme $z = \rho \exp(i\theta)$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ unique et $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$.
10. En utilisant que $\exp(a + ib) = \exp(a)\exp(ib)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que l'application $z \mapsto \exp(z)$ est un morphisme de groupes **surjectif** de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^\times$ et que son noyau est le sous-groupe $2i\pi\mathbb{Z}$. (Commencer par observer que si $\exp(z) = 1$ alors $|\exp(z)| = 1$, puis utiliser la question (8).)