UPMC Mathématiques Approfondies pour les Sciences 2016-2017

Partiel du 19 avril 2017

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce partiel est noté sur **30**. Le sujet est volontairement long et le barème donné est indicatif. Les notes > 30 seront comptées comme 30.

Exercice 1. (16 pts) On fixe un réel $c > 0$. Pour tout $b \in [0, c[$, on considère l'équation différentielle linéaire sans second membre :

$$(E_b) \qquad x''(t) + 2bx'(t) + c^2x(t) = 0.$$

Par hypothèse, $b^2 - c^2$ est < 0. On pose $\sigma = \sigma(b) = \sqrt{c^2 - b^2}$ et $P(X) = X^2 + 2bX + c^2$.

1. (1 pt) Exprimer en fonction de b et σ les racines λ et μ de l'équation $P(X) = 0$, en supposant que la partie imaginaire de λ est > 0.
2. (2 pts) Soit $\nu \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction à valeurs complexes $e_\nu : t \mapsto e^{\nu t}$ est solution de (E_b) si et seulement si ν est racine de P.
3. (2 pts) Montrer que les fonctions u et v, définies par $u(t) = e^{-bt}\cos(\sigma t)$ et $v(t) = e^{-bt}\sin(\sigma t)$ sont solutions de (E_b).

   On rappelle que pour toute solution w de (E_b) à valeurs réelles, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ uniques tels que $w = \alpha u + \beta v$. (On ne demande pas de démontrer ceci.) On considère maintenant l'équation différentielle avec second membre :

   $$(S_b) \qquad x''(t) + 2bx'(t) + c^2x(t) = \cos(ct).$$

4. (4 pts) On suppose $b \neq 0$. Montrer alors qu'il existe une unique solution $f = f_b$ de (S_b) de la forme $t \mapsto A\sin(ct)$, pour une constante $A = A_b$ à préciser. Déterminer l'unique solution x_b de (S_b) telle que $x_b(0) = 0$ et $x_b'(0) = 1$.
5. (3 pts) On suppose $b = 0$. Montrer alors qu'il existe une unique solution g_0 de (S_0) de la forme $t \mapsto Bt\sin(ct)$, pour une constante B à préciser. Déterminer l'unique solution x_0 de (S_0) telle que $x_0(0) = 0$ et $x_0'(0) = 1$.
6. (1 pt) Soit $b \neq 0$ et soient x_b et x_0 les solutions obtenues dans les deux questions précédentes. Montrer qu'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

   $$(\star) \qquad x_b(t) - x_0(t) = \frac{k}{b}\Big(\frac{1 - bt}{c}\sin(ct) - e^{-bt}\frac{\sin(\sigma t)}{\sigma}\Big) + \frac{e^{-bt}}{\sigma}\sin(\sigma t) - \frac{1}{c}\sin(ct)$$

   pour un réel k que l'on précisera. [1]

   On rappelle que lorsque h tend vers 0, on a $\sqrt{1-h} = 1 - \dfrac{h}{2} + O(h^2) = 1 + O(h)$, et de même $(1-h)^{-1/2} = 1 + O(h)$. Comme $\sigma = c\left(1 - \dfrac{b^2}{c^2}\right)^{1/2}$ alors, lorsque b tend vers 0 on a : $\sigma = c + O(b^2)$ et $\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{c} + O(b^2)$.

   Fixons désormais un réel t et posons $h = \sigma t - ct$. Alors $\sigma t = ct + h$ et l'on a

   $$\sin(\sigma t) = \sin(ct)\cos(h) + \cos(ct)\sin(h)$$

   avec $h = O(b^2)$ lorsque $b \to 0$.

1. La formule ci-dessus rectifie une erreur de l'énoncé original, où manquait le dernier terme.

7. (3 pts) En utilisant le développement limité en 0 de cos et sin à l'ordre 1, et de exp à l'ordre 2, montrer que $\sin(\sigma t) = \sin(ct) + O(b^2)$ puis que

$$e^{-bt}\frac{\sin(\sigma t)}{\sigma} = (1-bt)\frac{\sin(ct)}{c} + O(b^2).$$

Montrer alors (t étant fixé) que $\lim_{b\to 0}\big(x_b(t) - x_0(t)\big) = 0$.

Exercice 2. (21 pts) On rappelle que la fonction $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$ est de classe C^1, est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et vérifie $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}(x)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soient $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \mathrm{th}(y) - \dfrac{1}{x}$. On considère l'équation différentielle :

$$(*) \qquad y'(t) = \mathrm{th}(y(t)) - \frac{1}{t}.$$

avec la condition initiale $y(1) = b$, où b est un réel.

1. (2 pts) Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Sont-elles continues sur U ?
2. (2 pts) Citer un théorème du cours qui assure qu'il existe une unique solution maximale (J_b, y_b) vérifiant $y_b(1) = b$, où J_b est un intervalle ouvert contenant 1.
3. (4 pts) Soient B, S les fonctions $[1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définies par $B(t) = b - 2(t-1)$ et $S(t) = b + t - 1$. Montrer que B (resp. S) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour $(*)$. En déduire que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'extrémité supérieure de J_b est $+\infty$.
4. (4 pts) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\beta(t) = b - t + 1 - \log(t)$ et $\gamma(t) = b + t - 1 - \log(t)$. Montrer que β (resp. γ) est une barrière inférieure (resp. supérieure) forte pour $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que $\gamma(t) < y_b(t) < \beta(t)$ pour tout $t \in J_b$ tel que $t < 1$. En déduire que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'extrémité inférieure de J_b est 0 et que $\lim_{t\to 0^+} y_b(t) = +\infty$. (On pourra utiliser le théorème de l'entonnoir pour les temps décroissants.)

   On note $\mathrm{arcth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de th. On rappelle que pour tout $x \in]-1,1[$ on a $\mathrm{arcth}'(x) = 1/(1-x^2)$.

5. (3 pts) Soit $\mathcal{C}_0$ l'isocline de pente 0, i.e. $\mathcal{C}_0 = \{(t,y) \in U \mid f(t,y) = 0\}$. Déterminer $\mathcal{C}_0$ et montrer que c'est une barrière inférieure forte pour $(*)$ sur $]1,+\infty[$. Montrer également que la fonction nulle est une barrière supérieure forte pour $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. (2 pts) On pose $A = \{(x,y) \in U \mid x > 1,\ 0 \le y \le \mathrm{arcth}(1/t)\}$. Montrer qu'il existe un unique $\overline{b} \in \mathbb{R}$ tel que $(t, y_{\overline{b}}(t)) \in A$ pour tout $t > 1$.
7. (4 pts) Montrer que si $b > \overline{b}$, il existe $T > 1$ tel que $y_b(t) > \mathrm{arcth}(1/t)$ et $y_b'(t) > 0$ pour tout $t > T$. En déduire que y_b tend en $+\infty$ vers une limite $L \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, puis montrer que $L = +\infty$. (Raisonner par l'absurde en supposant L finie pour obtenir une contradiction.)