UPMC Mathématiques Approfondies pour les Sciences 2016-2017

TD 1ère semaine

Exercice 1. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}, \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 - \frac{3+6i}{3-4i}, \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 3+3i, \quad z_3 = -1-\sqrt{3}i,$$

$$z_4 = (1-i)^9, \quad z_5 = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad z_6 = e^{i\theta} \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Pour $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Exercice 4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $Z = \dfrac{z+1}{z-1}$ appartient à $i\mathbb{R}$.

Exercice 5. On définit la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ par

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

et l'on pose $P = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

1. Montrer que tout élément de P a son image par f dans D.
2. Montrer que tout élément de D possède un unique antécédent par f dans P.
3. Quelle est l'image par f de l'axe réel ?

Exercice 6. On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard $(\ |\ )$. Alors :

— Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ (et $\varrho \in \mathbb{R}_+^*$) l'application $z \to e^{i\theta}z$ (resp. $z \to \varrho e^{i\theta}z$) s'identifie à la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ (resp. à la similitude directe de rapport ϱ et d'angle θ).

— La conjugaison complexe $z = x+iy \to \overline{z} = x - iy$ s'identifie à la symétrie orthogonale s_0 par rapport à l'axe des x.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on note r_θ la rotation d'angle θ, D_θ la droite de $\mathbb{R}^2$ engendrée par le vecteur $e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$, et s_θ la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_θ. Nous fixons $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.

1. En faisant un dessin, montrer que l'application composée $r_\theta \circ s_0 \circ r_{-\theta}$ est la symétrie orthogonale s_θ. En déduire que $s_\theta(z) = e^{2i\theta}\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. Calculer $s_\theta \circ s_\varphi$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. En déduire que la fonction $s_\theta \circ s_\varphi$ est une rotation dont on précisera l'angle.
3. Calculer $s_\theta \circ r_\varphi(z)$ et $r_\varphi \circ s_\theta(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. En déduire que $s_\theta \circ r_\varphi$ et $r_\varphi \circ s_\theta$ sont des symétries orthogonales par rapport à des droites que l'on précisera.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + z + 1 = 0, \quad z^2 = 3+4i, \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0, \quad 4z^2 - 2z + 1 = 0.$$

Exercice 8. On admet le **Théorème** suivant :

Tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

1. En procédant par récurrence sur le degré, en déduire le résultat suivant :

   Pour tout polynôme complexe $P(z) = a_0 z^d + a_1 z^{d-1} + a_2 z^{d-2} + \cdots + a_d$, avec $a_0 \neq 0$ il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ non nécessairement distincts tels que

$$P(z) = a_0(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_d).$$

2. (Formules de Viète). On suppose $a_0 = 1$. En développant le produit $(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_d)$ montrer que :
   — $a_1 = -(\alpha_1 + \cdots + \alpha_d)$, $\quad a_d = (-1)^d \alpha_1 \cdots \alpha_d$, $\quad a_2 = \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j$.
   — En particulier, si $d = 2$ exprimer P en fonction de la somme s et du produit p des racines.
   — Pouvez-vous deviner la formule exprimant le coefficient a_k en fonction des racines ?

Exercice 9. Résoudre, sur des intervalles que l'on précisera, les équations différentielles suivantes :

$$y' = y, \quad y' + 2y = 0 \quad y' = y + 1, \quad y' + y = 2e^x, \quad y' + y = \cos(x) + \sin(x), \quad y' - 2y = x^2.$$

Exercice 10. On suppose que la vitesse à laquelle un objet se refroidit est proportionnelle à la différence entre sa propre température et la température de l'espace autour de lui, qu'on suppose constante. Un objet avec une température initiale $T_0 = 110°$ C est posé dans un environnement à 10° C. Au bout d'une heure l'objet arrive à 60° C. Combien de temps faudra-t-il attendre pour que l'objet arrive à 35° C ?

Exercice 11. Lors d'une compétition de plongeon d'une hauteur de 27 m, les commentateurs ont dit que les plongeurs arrivaient dans l'eau avec une vitesse d'environ 90 km/h. En prenant l'accélération de la pesanteur g égale à 10 m/s^2, déterminer la vitesse acquise lors d'une chute libre de 27 m. Comparer avec la vitesse indiquée plus haut.

Exercice 12. En présence d'une force de friction visqueuse de la forme $-\lambda\overrightarrow{v}$ avec $\lambda > 0$, un point matériel de masse m tombe en chute libre avec une vélocité initiale v_0. Déterminer, en fonction de λ et de l'accélération de la pesanteur g, la vélocité maximale que le point peut atteindre.

Exercice 13. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et l'on note (x, y) les coordonnées dans ce repère. On lance à partir de O un projectile, assimilé à un point matériel, avec un vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ non nul et formant avec $\overrightarrow{i}$ un angle $\theta \in]0, \pi/2[$. On note v_0 la norme euclidienne de $\overrightarrow{v_0}$, de sorte que $\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos\theta \overrightarrow{i} + v_0 \sin\theta \overrightarrow{j}$. On suppose que le projectile n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur (i.e. on néglige les forces de frottement dans l'air).

1. Écrire les équations différentielles du mouvement pour les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ du mobile à l'instant t.
2. Soit $t_0 > 0$ l'instant où le projectile retombe au sol, i.e. où $y(t_0) = 0$. On note $x_{max} = x(t_0)$ la distance horizontale ainsi atteinte. Exprimer x_{max} en fonction de v_0 et θ.
3. En supposant v_0 fixé, déterminer la valeur de θ pour laquelle x_{max} est le plus grand possible.

Exercise 14. Résoudre, sur des intervalles que l'on précisera, les équations différentielles suivantes :

$$y'' - y = e^x, \quad y'' + 2y = \cos(t), \quad 3y'' + 8y' + 4y = e^{-x} + \sin x.$$