UPMC Mathématiques Approfondies pour les Sciences 2016-2017

TD 2ème semaine

Partie 1 : Exponentielle Complexe

On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(S_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

converge ; sa limite est notée $\exp(z)$. Noter que $\exp(0) = 1$. On admet les trois résultats suivants :

(a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.

(b) Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

(c) La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(it)$ est dérivable, de dérivée $f'(t) = if(t)$.

Pour tout réel t, on note $\cos(t)$ et $\sin(t)$ les parties réelle et imaginaire de $\exp(it)$. D'après ce qui précède, on a :

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \sum_{n\geq 3}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \tag{†}$$

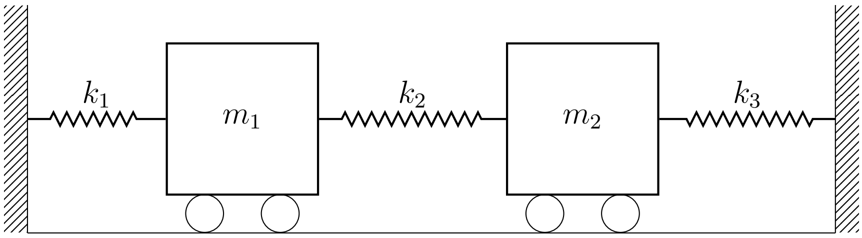
$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \sum_{n\geq 2}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{‡}$$

et cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $\cos'(t) = -\sin(t)$ et $\sin'(t) = \cos(t)$.

1. Déduire de (a) et (b) que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\exp(it)| = 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 2]$ on a $\dfrac{t^n}{n!} > \dfrac{t^{n+2}}{(n+2)!}$.
3. En utilisant (†) et (‡), montrer que pour tout $t \in]0, 2]$ on a
$$\sin(t) \geq t - \frac{t^3}{6} > 0 \qquad \text{et} \qquad \cos(t) \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}.$$
4. Montrer que la fonction cos décroît strictement sur $[0, 2]$ et que pour tout $t \in [0, 2]$ l'image par $s \mapsto \exp(is)$ de l'intervalle $[0, t]$ est contenue dans le demi-cercle situé dans le demi-plan $y \geq 0$.
5. En utilisant ce qui précède, montrer que $\cos(2) \leq \dfrac{-1}{3} < 0$. En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in]0, 2[$ tel que $\cos(\alpha) = 0$, $\sin(\alpha) = 1$ et donc $\exp(i\alpha) = i$.
6. Prouver que l'image par $t \mapsto \exp(it)$ de $[0, \alpha]$ est exactement C, le quart de cercle joignant les nombres complexes 1 et i.
7. Montrer que $\exp(i(t + 4\alpha)) = \exp(it)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puis montrer que si $\exp(i\beta) = 1$ pour un réel $\beta \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\beta = n4\alpha$.
   Donc la fonction $t \mapsto \exp(it)$ est périodique de période exactement 4α. On **définit** π par $2\pi = 4\alpha$.
8. Montrer que l'application $z \mapsto iz$, c'est-à-dire $x + iy \mapsto -y + ix$, est une bijection de C sur le quart de cercle C' joignant i à -1. En déduire que $\exp(i\pi) = -1$ et que l'image de $t \mapsto \exp(it)$ de $[0, 2\alpha]$ est exactement le demi-cercle $D = C \cup C'$.
9. En utilisant que $S^1 = D \cup D'$, où $D' := \{-z \colon z \in D\}$, montrer que l'application $t \mapsto \exp(it)$ est un morphisme de groupes **surjectif** de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité, et que son noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$.
10. Montrer que tout $z \in \mathbb{C}^\times$ s'écrit sous la forme $z = \rho\exp(i\theta)$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ unique et $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$.

Partie 2 : Équations différentielles linéaires

Exercice 1. On considère le système suivant : deux mobiles de masses respectives m_1 et m_2 sont reliés entre eux par un ressort de raideur k_2, et ils sont reliés à deux murs (séparés d'une distance d) par deux ressorts de raideurs respectives k_1 et k_3, comme sur la figure ci-dessous. On note l_i la longueur au repos du ressort de raideur k_i. On néglige les frottements.



1. Calculer les positions à l'équilibre des deux mobiles.
2. On note x_1 et x_2 les écarts entre la position des mobiles et leur position à l'équilibre. Établir le système d'équations différentielles vérifiées par x_1 et x_2.
3. En supposant $m_1 = m_2$ et $k_1 = k_2 = k_3$, résoudre le système précédent.
4. (plus difficile) Sans faire l'hypothèse simplificatrice de la question précédente, résoudre le système en considérant deux combinaisons linéaires bien choisies de x_1 et x_2.
5. (encore plus difficile) En supposant les masses et les raideurs identiques, essayer de généraliser à un système analogue avec N mobiles et $N+1$ ressorts.

Exercice 2. On considère un circuit formé d'une résistance R et d'un condensateur C en série, soumis à une tension « carrée »valant E dans l'intervalle de temps $[0, T]$, puis 0 dans l'intervalle $[T, 2T]$, puis à nouveau E dans l'intervalle $[2T, 3T]$, etc... Par ailleurs, on note τ la « constante de temps » RC.

Notons $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur à l'instant t, et $I(t)$ l'intensité dans le circuit à l'instant t. On rappelle que dans tout intervalle $[nT, (n+1)T]$ on a :

$$I(t) = C\frac{du}{dt}(t).$$

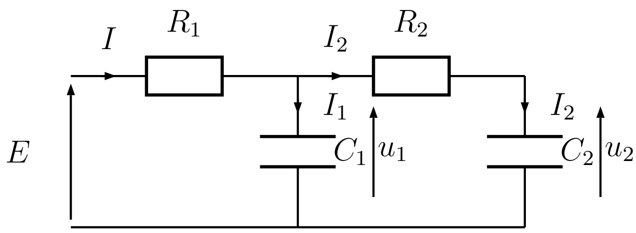
On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ le condensateur est déchargé, i.e. $u(0) = 0$.

1. Calculer $u(t)$ pour tout $t \in [0, T]$. Exprimer $u(T)$ en fonction de $\sigma := e^{-T/\tau}$.
2. Calculer $u(t)$ pour tout $t \in [T, 2T]$ et exprimer $u(2T)$ en fonction de σ.
3. Pour tout $n \geq 0$, calculer $u(2nT)$ et $u((2n+1)T)$. Calculer les limites de ces deux suites.
4. On considère en général que le système « fonctionne bien » si

$$\frac{1}{1+\sigma} \geq 0,95 = \frac{19}{20} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sigma}{1+\sigma} \leq 0,05 = \frac{1}{20}.$$

   Montrer que cela équivaut à $T \geq 3\tau$. Interpréter.

Exercice 3. Considérons maintenant le circuit obtenu en juxtaposant deux circuits du type précédent :



1. Montrer que l'équation différentielle régissant ce circuit est
$$R_1C_1R_2C_2\frac{d^2u_2}{dt^2}+\Big((R_1+R_2)C_2+R_1C_1\Big)\frac{du_2}{dt}+u_2=E.$$
2. On suppose désormais pour simplifier que $R_1=R_2=R$ et $C_1=C_2=C$ et on pose $\tau=RC$. Écrire l'équation simplifiée.
3. On suppose qu'à l'instant initial $t=0$ les deux condensateurs sont déchargés. Calculer $u_2(t)$ pour tout $t\in[0,T]$.
4. Calculer $u_2(t)$ sur l'intervalle $[T,2T]$. Puis sur tout intervalle $[nT,(n+1)T]$. Donner les valeurs $u_2(nT)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $x'=2x+\cos(4t)$.
2. $x''-2x'+x=e^{2t}$.
3. $x''-2x'+x=\cos(t)$.
4. $x''-2x'+x=e^{t}$.
5. $x''-4x'+8x=\cos(t)$.
6. $x''-3x'+2x=e^{t}$.
7. $x''-3x'+2x=2t^2+1$.

Exercice 5. En 1831, le passage d'un régiment marchant au pas fait s'écrouler un pont suspendu (le pont de Broughton) près de Manchester, en Angleterre, ce qui conduit l'armée à interdire la marche au pas lors de la traversée d'un pont. Plus récemment, la passerelle piétonne Millennium Bridge construite à Londres pour le passage à l'an 2000, se balance (verticalement et horizontalement) avec une amplitude de plus de 7cm en cas de grande affluence, ce qui conduit à la fermeture du pont pendant près de deux ans pour poser des amortisseurs pour réduire le balancement.

On propose ici une modélisation très simple de ce phénomène. Un pont suspendu peut être modélisé par un rectangle de masse m soutenu en ses quatre sommets par quatre ressorts identiques fixés à des poteaux supposés indéformables. Pour simplifier encore le modèle, on assimile le pont à un point matériel de masse m suspendu à un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0, dont l'extrémité supérieure est fixe. Le mouvement des soldats ou des passants sur le pont est modélisé par une force verticale $\vec{F}:=F_0\cos(\omega t)\vec{u}_z$, où $\vec{u}_z$ est un vecteur unitaire de l'axe vertical et $F_0>0$ est une constante. On suppose également que le mouvement est amorti par une force de frottement de la forme $-\nu\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse du point et $\nu>0$ une constante. La position du point matériel à l'instant t est repérée par son "altitude" $z(t)$ sur un axe vertical.

1. Montrer que, quitte à bien choisir l'origine de l'axe vertical, l'équation du mouvement se met sous la forme
$$z''+\frac{\omega_0}{Q}z'+\omega_0^2z=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)\,,$$
où ω_0 (fréquence propre) et Q (facteur de qualité) sont des réels strictement positifs que l'on explicitera en fonction des données.
2. Déterminer les solutions de l'équation homogène en fonction de la valeur de Q.
3. Déterminer une solution particulière de l'équation et l'écrire sous la forme $z(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$.
4. Déterminer le comportement asymptotique de toute solution de l'équation (quand $t\to+\infty$).
5. Suivant la valeur de Q, étudier les variations de l'amplitude A d'une solution particulière en fonction de ω.
6. Dans le cas où $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$, calculer la valeur maximale de l'amplitude et la fréquence ω correspondante. Comparer cette amplitude maximale avec celle de $\vec{F}$.
7. Interpréter "physiquement" les résultats précédents.