UPMC Mathématiques Approfondies pour les Sciences 2016-2017

TD 3ème semaine

Partie 1 : Étude des équations différentielles ordinaires

Exercice 0.

1. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $[a; b[$. On suppose que f' a une limite finie en b. Montrer que f est dérivable (à gauche) en b et que $f'(b) = \lim_b f'$.
2. On considère l'équation différentielle $y' = F(t, y)$, où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Soit f une solution maximale définie sur un intervalle I. Montrer que I est ouvert, i.e. de la forme $I = -]\alpha; \beta[$, avec $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Montrer que si $\beta < +\infty$, alors f n'est pas bornée au voisinage de β.

Exercice 1. Soient $k, y_0 \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions maximales de $y' = -ky^2$ telles que $y(0) = y_0$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = x^2 + y^2 \,.$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution maximale telle que $y(0) = 0$. Dans toute la suite, on considère cette solution.
2. Montrer que y est définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que y est impaire.
4. Montrer que y est strictement croissante.
5. Montrer que I est borné.
6. Calculer les limites de y aux bornes de I.

Exercice 3. Montrer que le problème de Cauchy $y' = \sqrt{|y|}$ et $y(0) = 0$ admet une infinité de solutions maximales distinctes. Analyser.

Exercice 4. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $y' - xy^2 = 2xy$.

Exercice 5. On considère un pendule pesant de masse m et de longueur l, non amorti. On le lâche avec une vitesse initiale nulle, dans une position initiale correspondant à un angle $-\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ par rapport à la verticale orientée vers le bas. On repère la position du pendule à l'instant t par son angle $\theta(t)$ par rapport à cette même verticale.

1. Montrer que l'équation du mouvement se met sous la forme $\theta'' + k\sin(\theta) = 0$, avec $k := \frac{g}{l} > 0$.
2. En multipliant l'équation par θ', montrer que $\theta'^2 = 2k(\cos\theta - \cos\theta_0)$.
3. Montrer que la solution maximale θ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.
4. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que θ et θ' soient strictement croissantes sur $[0, \epsilon]$.
5. Soit $t > 0$ tel que pour tout $s \in]0, t]$ on ait $\theta'(s) > 0$. Prouver qu'on a l'identité
$$t = \int_{-\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{2k(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \,.$$
6. En déduire qu'il existe un réel $t_1 > 0$ minimal tel que $\theta'(t_1) = 0$.
7. Étudier les variations et le signe de θ et θ' sur $[0, t_1]$.
8. Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in [0; t_1]$ tel que $\theta(t_0) = 0$.
9. Montrer que pour tout $t \in [0; t_1]$, on a $\theta(t + t_1) = -\theta(t)$.

10. En déduire que θ est périodique de période $T = 2t_1$.
11. Montrer que
$$T = 2\sqrt{\frac{2}{k}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \,.$$
12. Montrer que
$$T = \frac{2}{\sqrt{k}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \,.$$
13. En faisant le changement de variables $\sin\frac{\theta}{2} = \sin(\frac{\theta_0}{2})\sin\phi$, montrer que
$$T = \frac{4}{\sqrt{k}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\theta_0}{2})\sin^2\phi}} \,.$$
14. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \dfrac{x}{2} + O(x^2)$ au voisinage de 0.
15. En déduire que $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{k}}\left(1 + \dfrac{\theta_0^2}{16} + O(\theta_0^4)\right)$, pour θ_0 proche de 0.
16. Comparer avec les solutions de l'équation linéarisée du pendule, à savoir $\theta'' + k\theta = 0$.

Partie 2 : Dynamique des populations

Le but de cette partie est de formuler et étudier des équations qui essayent de modéliser l'évolution d'une ou deux populations qui interagissent (exemples : bactéries dans une boîte de Petri, proies et prédateurs dans un écosystème, etc...). Une fois fixée une unité de mesure pour quantifier la population (centaines, milliers, millions), la solution sera donc une fonction $x\colon I \to \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2)$ qu'on interprétera de la façon suivante :

$$x_i(t) = \text{“Nombre d'individus de l'espèce } i \text{ au temps } t \text{ par rapport à l'unité de mesure”.}$$

À partir de la solution x, on définit le taux de variation τ_i de la i-ème population par la formule

$$\tau_i(t, x) = \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} \,. \tag{1}$$

La biologie nous fournit différents modèles correspondant à diverses expressions de τ_i en fonction de t et x. On se propose d'en étudier quelques uns.

Exercice 1. (Croissance malthusienne)
On considère une seule population x. On dit que cette population a une croissance malthusienne si son taux de variation est constant
$$\tau(t, x) = \gamma \in \mathbb{R} \,.$$

1. Écrire l'équation de la dynamique associée à la croissance malthusienne.
2. Résoudre l'équation quand $x_0 \in \mathbb{R}_+$, calculer sa limite lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 2. (Croissance logistique)
On considère une seule population x. On dit que cette population a une croissance logistique avec capacité $K > 0$ si son taux de variation est de la forme
$$\tau(t, x) = 1 - \frac{x}{K} \,.$$

1. Écrire l'équation de la dynamique associée à la croissance logistique.
2. Soit $x(t)\colon I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de l'équation. Montrer que si $x_0 \in]0, K[$, alors pour tout $t \in I$, $x(t) \in]0, K[$. Prouver donc que $I = \mathbb{R}$.
3. Résoudre explicitement l'équation et calculer les limites de $x(t)$ lorsque $t \to \pm\infty$.

Exercice 3. (Modèle de Lotka-Volterra)
En 1926, le biologiste Umberto D'Ancona avait remarqué que le nombre de poissons proies dans la mer Adriatique avait mystérieusement baissé pendant la période de la première guerre mondiale. De nombreux pêcheurs étaient allés combattre et on s'attendait à une hausse uniforme des espèces de poissons en raison de la diminution de la pêche. Mais ceci n'était pas le cas. Le mathématicien Vito Volterra, beau père de D'Ancona, a proposé un modèle très simple pour expliquer ce phénomène. On considère deux populations x_1 (proies) et x_2 (prédateurs) et on suppose les taux de variations de la forme suivante

$$\tau_1(t, x_1, x_2) = a - bx_2 \quad \tau_2(t, x_1, x_2) = -c + dx_1$$

avec $a, b, c, d > 0$.

1. Écrire les équations du modèle de Lotka-Volterra.
2. Soit $(x_1(t), x_2(t))\colon I \to \mathbb{R}^2$ une solution maximale de l'équation. Montrer que si $x_1(0) = x_0 > 0$ et $x_2(0) = y_0 > 0$, alors $x_1(t) > 0$ et $x_2(t) > 0$ pour tout $t \in I$.
3. Calculer les points stationnaires du champ de vecteurs associé au modèle de Lotka-Volterra.
4. Pour chaque vecteur $\mathbf{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4)^t \in \mathbb{R}^4$, on introduit la fonction $H^{\mathbf{C}}\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie comme
$$H^{\mathbf{C}}(x, y) = C_1 \ln(x) + C_1 \ln(y) + C_3 x + C_4 y.$$
Trouver $\overline{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^4$ tel que, pour tout $t \in I$,
$$\frac{dH^{\overline{\mathbf{C}}}(x_1(t), x_2(t))}{dt} = 0\,.$$
5. Montrer que $I = \mathbb{R}$.
6. À l'aide de la question 4 et de la définition du système, tracer un graphe qualitatif des orbites d'une solution maximale $(x_1(t), x_2(t))$. (Facultatif : Prouver que les orbites sont périodiques).
7. En admettant que pour toute condition initiale (x_0, y_0), la solution maximale $(x_1(t), x_2(t))$ est périodique de période $T > 0$, trouver une expression explicite pour les populations moyennes
$$< x_1 >= \frac{1}{T}\int_0^T x_1(s)ds\,, \quad < x_2 >= \frac{1}{T}\int_0^T x_2(s)ds\,.$$
8. On suppose maintenant que les taux de croissance des deux espèces augmentent d'un même facteur $K > 0$. Comment changent les équations ? Comment varient les populations moyennes ? Interpréter les résultats avec le problème initial que Vito Volterra devait modéliser.