TD1. Normes, distances, applications continues

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours ; ce sont des compétences attendues de toutes et tous. Les exercices avec (*) sont un peu plus avancés, et préparent parfois à des paragraphes ultérieurs du cours. Enfin, ceux avec (**) peuvent être considérés comme des compléments de cours et sont réservés aux étudiant(e)s les plus motivé(e)s.

Exercice 1 (Normes et distances)**.** Une **norme** sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(a) $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on a $N(\lambda x) = |\lambda|\ N(x)$.

(c) Pour tout $x, y \in E$, on a $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Par exemple, la valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $N_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que si N est une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, alors l'application $d : E\times E \to \mathbb{R}_+$, $(x, y) \mapsto N(x - y)$ est une distance sur E.
3) $(**)$ Montrer que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, x) = 0$ est une distance sur E, mais ne provient pas d'une norme sur E. Indication : utiliser la propriété (b) d'une norme.

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme euclidienne)**.** Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire standard est défini par $(x \mid y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Pour tout $x \neq 0$, on a donc $(x \mid x) > 0$. On rappelle que le produit scalaire est symétrique : $(y \mid x) = (x \mid y)$, linéaire en la première variable :

$$\forall x, x, y' \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \qquad (\lambda x + \lambda' x' \mid y) = \lambda(x \mid y) + \lambda'(x' \mid y)$$

et en la deuxième variable :

$$\forall x, y, y' \in \mathbb{R}^n, \quad \mu, \mu' \in \mathbb{R}, \qquad (x, \mu y + \mu' y') = \mu(x \mid y) + \mu'(x \mid y').$$

1) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x \mid y)^2 \leq (x \mid x)(y \mid y)$$

et l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires. Indication : en supposant $x \neq 0$ et en posant $t = \dfrac{(y \mid x))}{(x \mid x)}$, utiliser l'inégalité $0 \leq (y - tx \mid y - tx)$ et développer le terme de droite. Traiter ensuite le cas $x = 0$.

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose $N_2(x) = \sqrt{(x \mid x)} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

2) Pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$, montrer que $N_2(x+y) \leq N_2(x)+N_2(y)$. Indication : on a $N_2(x+y)^2 = (x + y \mid x + y) = N_2(x)^2 + N_2(y)^2 + 2(x \mid y)$. Utiliser ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3) Montrer que N_2 est une norme sur $\mathbb{R}^n$. On l'appelle la *norme euclidienne* sur $\mathbb{R}^n$ et la distance associée (cf. exercice 1) est notée d_2 et appelée *distance euclidienne*.

4) Récrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz en utilisant $|(x \mid y)|$, $\|x\|_2$ et $\|y\|_2$.

Exercice 3 (Norme N_1 sur $\mathbb{R}^n$)**.** Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, on pose $N_1(x) = |x_1| + \cdots + |x_n|$. Montrer que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^n$. (Si on veut, on pourra le faire dans le cas $n = 2$.)

Exercice 4. Sur $\mathbb{R}^2$ on considère les normes N_1, N_2, N_∞ définies, pour tout $v = (x, y)$ par :

$$N_1(v) = \|v\|_1 = |x| + |y|, \quad N_2(v) = \|v\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}, \quad N_\infty(v) = \|v\|_\infty = \max\big(|x|, |y|\big).$$

Pour chacune de ces normes N, la boule unité fermée $\overline{B}_N(1)$ est $\overline{B}_N(1) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid N(v) \leq 1\}$. Pour abréger, on écrit $\overline{B}_1(1)$, $\overline{B}_2(1)$ et $\overline{B}_\infty(1)$ au lieu de $\overline{B}_{N_1}(1)$, $\overline{B}_{N_2}(1)$ et $\overline{B}_{N_\infty}(1)$.

1) Faire un dessin représentant $\overline{B}_2(1)$ et $\overline{B}_\infty(1)$.
2) On veut décrire $\overline{B}_1(1)$, qui est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant la condition $|x| + |y| \leq 1$.
   a) Montrer que $\overline{B}_1(1)$ est invariante par la symétrie par rapport à chacun des axes, c.-à-d. que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$(x, -y) \in \overline{B}_1(1) \iff (x, y) \in \overline{B}_1(1) \iff (-x, y) \in \overline{B}_1(1).$$
   b) On suppose $x, y \geq 0$. Montrer alors que la condition équivaut à : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1 - x$. En déduire que l'intersection de $\overline{B}_1(1)$ avec le quadrant $x, y \geq 0$ est la partie de ce quadrant située en-dessous du graphe de la fonction $[0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x$.
   c) Décrire l'intersection de $\overline{B}_1(1)$ avec le quadrant $x \geq 0 \geq y$. On pourra procéder comme dans la question précédente ou utiliser la question précédente et la symétrie appropriée.
   d) Décrire de même l'intersection de $\overline{B}_1(1)$ avec le quadrant $y \geq 0 \geq x$.
   e) Décrire de même l'intersection de $\overline{B}_1(1)$ avec le quadrant $x, y \leq 0$.
   f) Conclure en dessinant $\overline{B}_1(1)$.

Exercice 5 (**)**.** On fixe un réel $p > 1$. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

L'objectif de cet exercice est de prouver que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1) Pour tout $s, t \geq 0$, montrer que $st \leq \dfrac{s^p}{p} + \dfrac{t^q}{q}$, où q est donné par $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$. *Indication* : on pourra fixer t et étudier la fonction $s \mapsto st - \dfrac{s^p}{p} - \dfrac{t^q}{q}$.
2) Pour x, $y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, on pose $\alpha = \|x\|_p$ et $\beta = \|y\|_q$. Montrer, pour tout i, que
   $$\frac{|x_i y_i|}{\alpha\beta} \leq \frac{|x_i|^p}{p\alpha^p} + \frac{|y_i|^q}{q\beta^q}$$
   et en déduire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. (En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient la fameuse inégalité de Hölder : $|(x \mid y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, elle généralise l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui est le cas $p = 2 = q$.)
3) En remarquant que $|x_i + y_i|^p \leq |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|$, montrer que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis conclure.

Exercice 6. Déterminer et représenter l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \sqrt{\frac{2x + 3}{y - 2}} \ ; \qquad f_2 : (x, y) \mapsto \ln(x + y + 1) \ ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sin(x - y)}.$$

Exercice 7. Tous les espaces $\mathbb{R}^k$ considérés sont munis de la norme N_∞.

0) Considérons des applications $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $\psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si ϕ est continue en x et ψ continue en $\phi(x)$, alors $\psi \circ \phi$ est continue en x.

   Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux applications continues.

1) Montrer que l'application $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + g(x)$ est continue.
2) Montrer que l'application $fg : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ est continue.
3) Soit $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\}$. Montrer que l'application $h = 1/g : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/g(x)$ est continue sur U.
4) Pour $i = 1, \dots, n$, montrer que la projection $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ est continue.

   Dans la suite de l'exercice on prend $n = 2$. Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et soient $f_1 : U \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f_1(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

5) Pour tout $u = (x,y) \in U$, montrer que $|f_1(x,y) \leq \|u\|_\infty$. En déduire que f_1 se prolonge en une application continue $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant $f_1(0,0) = 0$.

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de la norme N_∞. Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ et soient $f_1, \dots, f_p$ ses composantes, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est continue en x si et seulement si chaque f_i l'est.

Exercice 9 (*)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ si $y \neq x$ et $F(x,x) = f'(x)$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$. Indication : pour la continuité en un point (x,x), utiliser l'égalité des accroissements finis pour la fonction f, ainsi que la continuité de f'.

Exercice 10 (*)**.** Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E_1 \to E_2$ est **lipschitzienne** s'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $x, y \in E_1$, on ait :

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq C\, d_1(x,y).$$

1) Montrer alors que f est continue.
2) Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'une norme N. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme N_∞. Montrer que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to V$ est lipschitzienne, donc continue.