TD1–2. Normes, ouverts et fermés, applications continues

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours ; ce sont des compétences attendues de tous et toutes. Les exercices avec (*) sont un peu plus avancés, et préparent parfois à des paragraphes ultérieurs du cours. Enfin, ceux avec (**) peuvent être considérés comme des compléments de cours et sont réservés aux étudiant(e)s les plus motivé(e)s.

Exercice 1. Sur $\mathbb{R}^2$ on considère les normes N_1, N_2, N_∞ définies, pour tout $v = (x, y)$ par :

$$N_1(v) = \|v\|_1 = |x| + |y|, \quad N_2(v) = \|v\|_2 = \left(|x|^2 + |y|^2\right)^{1/2}, \quad N_\infty(v) = \|v\|_\infty = \max\left(|x|, |y|\right).$$

Pour chacune de ces normes N, la boule unité fermée $\overline{B}_N(1)$ est $\overline{B}_N(1) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid N(v) \leq 1\}$. Pour abréger, on écrit $\overline{B}_1(1)$, $\overline{B}_2(1)$ et $\overline{B}_\infty(1)$ au lieu de $\overline{B}_{N_1}(1)$, $\overline{B}_{N_2}(1)$ et $\overline{B}_{N_\infty}(1)$.

1) Faire un dessin représentant $\overline{B}_2(1)$ et $\overline{B}_\infty(1)$.
2) On veut décrire $\overline{B}_1(1)$, qui est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant la condition :

$$(*) \qquad |x| + |y| \leq 1.$$

   a) On suppose $x, y \geq 0$. Montrer alors que $(*)$ équivaut à : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1 - x$. En déduire que l'intersection de $\overline{B}_1(1)$ avec le quadrant $x, y \geq 0$ est la partie de ce quadrant située en-dessous du graphe de la fonction $[0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x$.
   b) On suppose maintenant $x \geq 0 \geq y$. Décrire de façon analogue l'intersection de $\overline{B}_1(1)$ avec le quadrant $x \geq 0 \geq y$.
   c) Décrire de même l'intersection de $\overline{B}_1(1)$ avec le quadrant $y \geq 0 \geq x$.
   d) Décrire de même l'intersection de $\overline{B}_1(1)$ avec le quadrant $x, y \leq 0$.
   e) Conclure en décrivant $\overline{B}_1(1)$.
3) On veut maintenant décrire $\overline{B}_1(1)$ d'une autre manière.
   a) Montrer que $(*)$ équivaut aux deux conditions :

$$(\dagger) \quad -1 \leq x + y \leq 1 \qquad \text{et :} \qquad (\ddagger) \quad -1 \leq x - y \leq 1.$$

   b) En faisant une figure, montrer que l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(\dagger)$ est la « bande » P comprise entre les droites d'équation $x + y = -1$ et $x + y = 1$.
   c) Montrer de même que l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(\ddagger)$ est la « bande » Q comprise entre les droites d'équation $x - y = -1$ et $x - y = 1$.
   d) En utilisant les figures précédentes, déterminer $P \cap Q$. Retrouver ainsi la description de $\overline{B}_1(1)$.

Exercice 2 (*). On pose $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ et l'on note $V = \mathscr{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires $E \to F$.

1) Quelle est la dimension de V ?

   On munit E d'une des normes N_∞, N_1 ou N_2, notée $\|\cdot\|_E$, et F d'une norme arbitraire notée $\|\cdot\|_F$. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, i.e. pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$.
2) Soit $\phi \in V$. En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|\phi(x)\|_F \leq C_\phi N_\infty(x), \qquad \text{où} \quad C_\phi = \sum_{i=1}^{n} \|\phi(e_i)\|_F.$$

3) En utilisant un résultat du cours, montrer que pour tout $x \neq 0$ on a $\dfrac{\|\phi(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C_\phi$.

4) Pour tout $\phi \in V$ on pose $\|\!|\phi|\!\| = \max_{x\neq 0} \dfrac{\|\phi(x)\|_F}{\|x\|_E}$. Montrer que $\|\!|\cdot|\!\|$ est une norme sur V. On dit que c'est la **norme d'opérateur** sur V (relativement aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ choisies sur E et F).

   Dans les deux questions suivantes, on prend $F = \mathbb{R}$, muni de la norme $\|t\|_F = |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $V = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ est l'espace dual de $E = \mathbb{R}^n$, i.e. V s'identifie à l'espace des matrices lignes $L = (a_1, \ldots, a_n)$, i.e. pour tout tel L et pour tout vecteur colonne $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ on a : $L(x) = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

5) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme N_∞. Pour tout $L = (a_1, \ldots, a_n) \in V$ et $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que

   $$(*) \qquad |L(x)| \leq N_\infty(x) \sum_{i=1}^n |a_i|$$

   et qu'on a égalité si pour tout i on a $x_i = \varepsilon_i$ où $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ est le signe de a_i. En déduire que, si l'on munit $\mathbb{R}^n$ de N_∞, on a $\|\!|L|\!\| = \|L\|_1$ pour tout $L \in V$.

6) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme N_2. Pour tout $L = (a_1, \ldots, a_n) \in V$ et $x \in \mathbb{R}^n$, montrer en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

   $$|L(x)| \leq N_2(x) \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2 \Big)^{1/2}$$

   et que l'égalité est obtenue si $L = 0$ ou si $x = \dfrac{1}{N_2(L)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. En déduire que, si l'on munit $\mathbb{R}^n$ de N_2, on a $\|\!|L|\!\| = \|L\|_2$ pour tout $L \in V$.

7) (**) On revient au cas où p est arbitraire et l'on munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de la norme euclidienne N_2.
   a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice $A = (a_{ij}) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ on a

   $$\|Ax\|_2 \leq \|x\|_2 \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

   b) En déduire que $\|\!|A|\!\| \leq N_2(A) = \left(\sum_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$.

   c) Montrer par un exemple que cette inégalité peut être stricte (prendre $p = n$ et $A =$ la matrice identité I_n).

Exercice 3 (**). Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose, pour $p \in [1, +\infty[$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

L'objectif de cet exercice est de prouver que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $p \in]1, +\infty[$.

1) Pour tout $s, t \geq 0$, montrer que $st \leq \dfrac{s^p}{p} + \dfrac{t^q}{q}$, où q est donné par $1/q = 1 - 1/p$. *Indication* : on pourra fixer t et étudier la fonction $s \mapsto st - \dfrac{s^p}{p} - \dfrac{t^q}{q}$.

2) Pour x, $y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, on pose $\alpha = \|x\|_p$ et $\beta = \|y\|_q$. Montrer, pour tout i, que

   $$\frac{|x_i y_i|}{\alpha\beta} \leq \frac{|x_i|^p}{p\alpha^p} + \frac{|y_i|^q}{q\beta^q}$$

   et en déduire $\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. (En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient la fameuse inégalité de Hölder : $|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, elle généralise l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui est le cas $p = 2 = q$.)

3) En remarquant que $|x_i + y_i|^p \leq |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|$, montrer que $\| \cdot \|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire, puis conclure.

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $x \in E$, montrer que le singleton $\{x\}$ est un sous-ensemble fermé de E.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle définie par $d(x, y) = |y - x|$.

1) Montrer que tout intervalle $]a, b[$ (avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) est ouvert.
2) Pour a, b dans $\mathbb{R}$, montrer que les intervalles $] - \infty, b]$, $[a, b]$ et $[a, +\infty[$ sont fermés.
3) Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ possédant un plus grand élément b (i.e. I est de la forme $] - \infty, b]$ ou $]a, b]$ ou $[a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$). Montrer que I n'est pas ouvert.
4) Montrer de même que si I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ possédant un plus petit élément a, alors I n'est pas ouvert.
5) Donner la liste de tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, puis de tous les intervalles fermés.
6) Quels sont les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouverts et fermés ?
7) (**) Quelles sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouverts et fermés ?

Exercice 6. Soit (E, d) un espace métrique.

1) Montrer que :
   a) Toute réunion (finie ou infinie) d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
   b) Toute intersection *finie* d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
2) Dans $\mathbb{R}$, donner l'exemple d'une suite décroissante $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'ouverts dont l'intersection n'est pas un ouvert.
3) Énoncer et démontrer les propriétés correspondantes pour les fermés.

Exercice 7. Représenter graphiquement les ensembles suivants et déterminer s'ils sont ouverts, fermés ou ni l'un ni l'autre.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x - 1| < 1\} \ ; \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\} \ ;$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, \ |y| \leq 1\} \ ; \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 < 4\}.$$

Exercice 8. 1) Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils ouverts ? fermés ?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \sin(y) \leq 4\} \ ; \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - 4e^y > 4\};$$
$$C = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : \cos(x) \geq 0\} \ .$$

2) (**) Même question pour le groupe des matrices inversibles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, qui est un sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^q$, où $q = n^2$.

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ de la norme N_∞. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux applications continues.

0) Soient (E, d), (E', d') et (E'', d'') trois espaces métriques, considérons des applications $\phi : E \to E'$ et $\psi : E' \to E''$ et soit $x \in E$. Montrer que si ϕ est continue en x et ψ continue en $\phi(x)$, alors $\psi \circ \phi$ est continue en x.
1) Montrer que $f + g$ est continue.
2) Montrer que l'application $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ est continue.
3) Soit $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\}$.
   a) Montrer que U est ouvert.
   b) Montrer que l'application $h = 1/g : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/g(x)$ est continue sur U.

4) Pour $i = 1, \ldots, n$, montrer que la projection $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ est continue.

Dans la suite de l'exercice on prend $n = 2$. Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et soient $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$f_1(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

5) Montrer que f_1 et f_2 sont continues sur U.

6) Pour tout $u = (x,y) \in U$, montrer que $|f_1(x,y) \leq \|u\|_\infty$. En déduire que f_1 se prolonge en une application continue $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant $f_1(0,0) = 0$.

7) Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)$ n'existe pas. Indication : pour tout $a \in \mathbb{R}$, calculer la limite de $f_2(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ en restant sur la droite $y = ax$, i.e. calculer

$$\lim_{x\to 0} f_2(x, ax) = \lim_{x\to 0} \frac{a^2x^2}{(1+a)^2x^2}.$$

Exercice 10. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de la norme N_∞. Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ et soient $f_1, \ldots, f_p$ ses composantes, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_p(x)\big)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est continue en x si et seulement si chaque f_i l'est.

Exercice 11 (*)**.** Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E_1 \to E_2$ est **lipschitzienne** s'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $x, y \in E_1$, on ait :

$$d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq C\, d_1(x,y).$$

1) Montrer alors que f est continue.

2) Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'une norme N. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme N_∞. Montrer que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to V$ est lipschitzienne, donc continue.

Exercice 12. Déterminer et représenter l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : (x,y) \mapsto \sqrt{\frac{2x+3}{y-2}} \ ; \qquad f_2 : (x,y) \mapsto \ln(x+y+1) \ ; \quad f_3 : (x,y) \mapsto \frac{1}{\sin(x-y)} \ .$$

Exercice 13 (*)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x,y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ si $y \neq x$ et $F(x,x) = f'(x)$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$. Indication : pour la continuité en un point (x,x), utiliser l'égalité des accroissements finis pour la fonction f, ainsi que la continuité de f'.

Exercice 14. Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2} \ ; \qquad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \ .$$

Exercice 15. Soit $F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

1) Pour tout $x \neq 0$, montrer que $f(x) = \lim_{y\to 0} F(x,y)$ existe. Quelle est sa valeur ?

2) Pour tout $y \neq 0$, montrer que $g(y) = \lim_{x\to 0} F(x,y)$ existe. Quelle est sa valeur ?

3) Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{y\to 0} g(y)$.

4) Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. Voir l'exercice 9, question (7).