Premier contrôle continu – 23 octobre 2017

Un soin particulier devra être accordé à la qualité et la précision de la rédaction.

Cours

On considère des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

- Donner la définition d'une suite convergente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$.
- Donner la définition de la continuité de f en $a \in \mathbb{R}^n$.
- Montrer que f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ qui converge vers a, $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.
- Quelle est la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$? Donner un exemple.
- Donner la définition de l'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'une partie $B \subset \mathbb{R}^p$ par f.
- Montrer que si O est ouvert dans $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(O)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
- Quelle est la définition de la différentiabilité de f en a ?
- Si f est différentiable en a, quel est le lien entre les dérivées partielles des composantes de f, la différentielle de f en a, et la matrice jacobienne de f en a ? Rappeler ce que vaut la différentielle de f en a si $n = 1 = p$.
- On suppose que f est différentiable en a de jacobienne A et que g est différentiable en $f(a)$ de jacobienne B. Montrer que la jacobienne de $g \circ f$ en a est égale au produit BA.

Références dans le cours.

- Définition 1.7 Limite d'une suite
- Définition 1.4 Fonctions continues
- Proposition 1.10
- On dit qu'une partie $O \subset \mathbb{R}^n$ est ouverte si pour tout $x \in O$, il existe un rayon $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r)$ la boule ouverte centrée en x et de rayon r est incluse dans O. Les pavés $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times\ldots\times]a_n, b_n[$ pour $(a_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ et $(b_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n$ sont ouverts. Les boules ouvertes sont ouvertes. $\mathbb{R}^n$ est ouvert. Pouvait aussi passer par les fermés, voir définition 1.18 Ouverts et fermés.
- Terminologie 1.19 Image réciproque.
- O est ouvert dans $\mathbb{R}^p$ donc pour tout $z \in O$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(z, r) \subset O$. Pour tout $x \in f^{-1}(O)$, par définition $f(x) \in O$, et on sait qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(f(x), r) \subset O$. Or par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que
$$y \in \mathcal{B}(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in \mathcal{B}(f(x), r).$$
Donc $\mathcal{B}(x, \delta) \subset f^{-1}(O)$, et celui est bien ouvert.
Pouvait aussi passer par les fermés, voir proposition 1.20.
- Définition 7.6
- Propositions 7.9 et 7.15 et définition 7.17 Matrice jacobienne. Si $n = 1 = p$, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $df(a)(h) = f'(a)h$.
- Théorème 7.18, remarque 7.20 Traduction matricielle.

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition et étudier la limite en $(0,0)$ de chacune des fonctions suivantes

$$f_1(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{y^2},\ f_2(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x},$$

$$f_3(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ et } f_4(x,y) = (x+y^2)\sin\big(\frac{1}{xy}\big).$$

Solution de l'exercice 1. Comme $\cos(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n} y^{2n}}{(2n)!}$, f_1 est définie sur tout $\mathbb{R}^2$ et se réecrit

$$f_1(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} y^{2(n-1)}}{(2n)!}.$$

Elle est continue et vaut 0 en $(0,0)$.

f_2 est définie dès que son dénominateur est non nul, et $\mathcal{D}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\}$. Si on se place sur la droite $y = x$,

$$f_2(x,x) = 2x \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 0,$$

mais si on se place sur la courbe $y^2 = x$,

$$f_2(y^2,y) = \frac{y^4+y^2}{y^2} = y^2 + 1 \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 1$$

donc f_2 n'admet pas de limite unique en $(0,0)$ et ne peut pas être continue en ce point.

À nouveau, f_3 est définie quand son dénominateur est non nul, et $\mathcal{D}_3 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. On a pour tout $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f_3(x,y)| = \frac{|x^2 y|}{\|(x,y)\|_2^2} \leq \frac{\|(x,y)\|_\infty^3}{\|(x,y)\|_2^2} \leq \|(x,y)\|_\infty$$

donc sa limite en $(0,0)$ vaut 0, et on peut même la prolonger de manière continue par 0 en $(0,0)$.

La fonction f_4 est définie dès que le dénominateur du terme dans le sinus est non nul, et $\mathcal{D}_4 = {\mathbb{R}_*}^2$. Comme sin est une fonction continue et bornée par 1 en valeur absolue, et que $(x,y) \mapsto x + y^2$, on a encore une fois f_4 prolongeable continûment par 0 en $(0,0)$ puisque dès que $(x,y) \in \mathcal{B}_\infty((0,0),1)$

$$|f_4(x,y)| \leq \|(x,y)\|_\infty + \|(x,y)\|_\infty^2 \leq 2\|(x,y)\|_\infty.$$

Exercice 2. Calculer les dérivées partielles de chacune des fonctions suivantes

$$f_1(x,y,z) = x^3 y + xyz + xz^3,\ f_2(x,y) = x^{y^2},$$

$$f_3(x,y) = \exp\big(\frac{x}{y}\big) + \exp\big(\frac{y}{x}\big) \text{ et } f_4(x,y) = \arcsin(x^2+y^2).$$

Solution de l'exercice 2.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 y + yz + z^3,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = x^3 + xz \text{ et } \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = xy + 3xz^2.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = y^2 x^{y^2-1} \text{ et } \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 2yx^{y^2}.$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = \frac{\exp(x/y)}{y} - \frac{\exp(y/x)}{x^2} = \frac{\partial f_3}{\partial y}(y,x).$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{\left(1-(x^2+y^2)^2\right)}} = \frac{\partial f_4}{\partial y}(y,x).$$

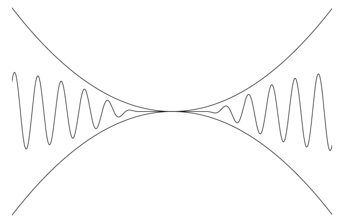
Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On considère deux applications $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiables en a et telles que $dg_1(a) = dg_2(a)$. Montrer que si pour tout $x \in \mathcal{B}(a,r)$ pour un certain $r > 0$ on a

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

avec

$$g_1(a) = f(a) = g_2(a),$$

alors f est différentiable en a avec $df(a) = dg_1(a) = dg_2(a)$.



Solution de l'exercice 3. Pour tout $x \in \mathcal{B}(a,r)$, on a

$$g_1(x) - g_1(a) - dg_1(a)(x-a) \leq f(x) - f(a) - dg_1(a)(x-a) \leq g_2(x) - g_2(a) - dg_1(a)(x-a)$$

d'après les deux inégalités de l'énoncé, et puisque les fonctions $dg_1(a)$ et $dg_2(a)$ sont égales, on a que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{g_1(x) - g_1(a) - dg_1(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0 = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{g_2(x) - g_2(a) - dg_1(a)(x-a)}{\|x-a\|}$$

ce qui veut dire que, par encadrement, on a aussi

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a) - dg_1(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Donc par définition, puisque $dg_1(a)$ est bien linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, f différentiable en a de différentielle $df(a) = dg_1(a) = dg_2(a)$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$.

1) Soit $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = ax\right\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0\right\}$, une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que sur la droite $\mathcal{D}$, f est continue.

2) Est-ce que f est continue en $(0,0)$?

Solution de l'exercice 4.

1) Sur l'axe $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0\}$, pour tout $y \neq 0$

$$f(x,y) = f(0,y) = 0 = f(0,0).$$

f est constante sur cette droite, donc elle y est continue.
Sur une droite $\mathcal{D}$ différente de cet axe, pour $x \neq 0$

$$f(x,y) = f(x,ax) = \frac{ax^3}{x^4 + a^2x^2} = \frac{ax}{x^2 + a^2} \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$$

donc elle y est bien continue.

2) Sur la courbe $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\}$, pour $x \neq 0$,

$$f(x,y) = f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \underset{\substack{x \to 0 \\ \neq}}{\not\to} 0 = f(0,0)$$

et f n'est pas continue en $(0,0)$, donc il ne suffit pas d'être continue sur toute droite passant par un point pour être continue en ce point.

Exercice 5. Soient $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\phi(\frac{y}{x})$. Montrer qu'on a

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y).$$

Solution de l'exercice 5. f est différentiable sur son ensemble de définition puisque sur celui-ci, x ne s'annule pas donc $(x,y) \mapsto y/x$ est $\mathcal{C}^1$ donc différentiable, et donc la composée avec ϕ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ est aussi différentiable, ainsi que le produit de tout ceci avec x. On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \phi(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x}\phi'(\frac{y}{x}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\phi'(\frac{y}{x}),$$

donc

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\phi(\frac{y}{x}) = f(x,y).$$