Premier contrôle continu – 23 octobre 2017

Un soin particulier devra être accordé à la qualité et la précision de la rédaction.

Cours
On considère des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

· Donner la définition d'une suite convergente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$.

· Donner la définition de la continuité de f en $a \in \mathbb{R}^n$.

· Montrer que f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ qui converge vers a, $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

· Quelle est la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$? Donner un exemple.

· Donner la définition de l'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'une partie $B \subset \mathbb{R}^p$ par f.

· Montrer que si O est ouvert dans $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(O)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

· Quelle est la définition de la différentiabilité de f en a ?

· Si f est différentiable en a, quel est le lien entre les dérivées partielles des composantes de f, la différentielle de f en a, et la matrice jacobienne de f en a ? Rappeler ce que vaut la différentielle de f en a si $n = 1 = p$.

· On suppose que f est différentiable en a de jacobienne A et que g est différentiable en $f(a)$ de jacobienne B. Montrer que la jacobienne de $g \circ f$ en a est égale au produit BA.

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition et étudier la limite en $(0, 0)$ de chacune des fonctions suivantes

$$f_1(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{y^2},\ f_2(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x},$$

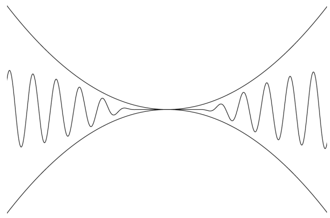
$$f_3(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \text{ et } f_4(x,y) = (x+y^2)\sin\big(\frac{1}{xy}\big).$$

Exercice 2. Calculer les dérivées partielles de chacune des fonctions suivantes

$$f_1(x,y,z) = x^3y + xyz + xz^3,\ f_2(x,y) = x^{y^2},$$

$$f_3(x,y) = \exp\big(\frac{x}{y}\big) + \exp\big(\frac{y}{x}\big) \text{ et } f_4(x,y) = \arcsin(x^2+y^2).$$

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On considère deux applications $g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiables en a et telles que $dg_1(a) = dg_2(a)$. Montrer que si pour tout $x \in \mathcal{B}(a,r)$ pour un certain $r > 0$ on a



$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

avec

$$g_1(a) = f(a) = g_2(a),$$

alors f est différentiable en a avec $df(a) = dg_1(a) = dg_2(a)$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$.

1) Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = ax\}$ pour $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0\}$, une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que sur la droite $\mathcal{D}$, f est continue.
2) Est-ce que f est continue en $(0,0)$?

Exercice 5. Soient $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\phi(\frac{y}{x})$. Montrer qu'on a

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y).$$