TD 11 Devoir du 22 octobre 2018 (durée 1h30)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce devoir est noté sur **20**. Les trois exercices sont indépendants, le total des points fait environ 30 et les notes > 20 seront comptées comme 20.

Exercice 1. — (10,5 pts) On pose $f(x, y) = y^4 - 2x(1 + y^2) + 2x^2$.

(1) Justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Solution. — (1 pt) f est un polynôme en deux variables, donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc a fortiori de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. □

(2) Déterminer les points critiques de f. *Indication* : pour un point critique (x, y), on exprimera x en fonction de y puis l'on résoudra l'équation $yP(y) = 0$ où P est un certain polynôme de degré 2.

Solution. — (2,5 pts) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2(1 + y^2) + 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4xy$$

donc (x, y) est un point critique si et seulement si $x = \dfrac{1 + y^2}{2}$ et

$$0 = 4y^3 - 2y(1 + y^2) = 2y^3 - 2y = 2y(y^2 - 1).$$

On obtient donc les points critiques $p_0 = (1/2, 0)$, $p_1 = (1, 1)$ et $p_2 = (1, -1)$. □

(3) Déterminer les dérivées partielles secondes de f et écrire la matrice hessienne de f en un point $p = (x, y)$.

Solution. — (3 pts) On a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 4x$, et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4y.$$

Donc la matrice hessienne de f en un point $p = (x, y)$ est

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -4y \\ -4y & 12y^2 - 4x \end{pmatrix}.$$

□

(4) Pour chaque point critique p déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local de f ou un point selle.

Solution. — (4 pts) En p_0, la matrice hessienne est $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; les valeurs propres sont 4 et -2, donc de signes contraires, donc p_0 est un point selle.

En p_1 la matrice hessienne est $B_1 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ et en p_2 c'est $B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Dans les deux cas le déterminant est > 0, donc les valeurs propres sont de même signe, et la trace est > 0 donc les deux valeurs propres sont > 0, donc p_1 et p_2 sont des minimal locaux. □

Exercice 2. — (10,5 pts) Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

(1) Démontrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$ et que $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.

Solution. — (2,5 pts) Pour tout i on a $\sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \geq \sqrt{|x_i|^2} = |x_i|$, d'où $\|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$. D'autre part,

$$(\|x\|_2)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{i<j} |x_i|\ |x_j| = (\|x\|_1)^2$$

d'où $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Et, posant $C = \|x\|_\infty$ on a $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq nC$ et

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq \sqrt{nC^2} = \sqrt{n}\,C.$$

□

(2) Soient $t_1, \dots, t_n$ des réels. En le justifiant soigneusement, déterminer sous quelles conditions on a $|\sum_{i=1}^n t_i| = \sum_{i=1}^n |t_i|$. Indication : on pourra introduire l'ensemble I (resp. J) des indices i tels que $t_i > 0$ (resp. $t_i < 0$).

Solution. — (2 pts) Posons $S = \sum_{i=1}^n t_i$. Comme les termes nuls ne jouent aucun rôle, on peut supposer que $t_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Notons $P = \sum_{i\in I} t_i$ la somme des termes positifs et $N = \sum_{i\in J} t_i$ celle des termes négatifs. Alors on a $S = P + N$ et l'on a les inégalités :

$$-\sum_{i=1}^n |t_i| \leq N = -\sum_{i\in J} |t_i| \leq P + N \leq P = \sum_{i\in I} |t_i| \leq \sum_{i=1}^n |t_i|.$$

Alors chacune des deux inégalités de gauche est une égalité si et seulement si $P = 0$ c'est-à-dire si $J = \{1, \dots, n\}$, et de même chacune des deux inégalités de droite est une égalité si et seulement si $N = 0$ c'est-à-dire si $I = \{1, \dots, n\}$. Ceci montre qu'on a l'égalité désirée si et seulement si tous les t_i non nuls sont de même signe. □

On fixe un élément *non nul* $a = (a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

(3) On pose $S_\infty(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$. Pour tout $x \in S_\infty(1)$, montrer que $|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \|a\|_1$. Déterminer, en le justifiant soigneusement, pour quels $x \in S_\infty(1)$ cette inégalité est une égalité.

Solution. — (2 pts) On a

$$|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|\ |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| = \|a\|_1,$$

la seconde inégalité résultant de l'hypothèse $|x_i| \leq 1$. Cette inégalité est une égalité si et seulement si $|x_i| = 1$ pour tout i tel que $a_i \neq 0$. Dans ce cas, la première inégalité est une égalité si et seulement si tous les $a_i x_i$ avec $a_i \neq 0$ sont de même signe $\varepsilon = \pm 1$, i.e. si et seulement si $x_i = \varepsilon a_i/|a_i|$ pour tout a_i non nul. □

(4) On pose $S_2(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. En utilisant un théorème connu, montrer que pour tout $x \in S_2(1)$ on a $|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \|a\|_2$ et déterminer pour quels $x \in S_2(1)$ cette inégalité est une égalité.

Solution. — (4 pts) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|a \cdot x| \leq \|a\|_2\ \|x\|_2$$

où $a \cdot x$ désigne le produit scalaire de a et de x. Le terme de gauche est $|\sum_{i=1}^n a_i x_i|$ et, comme $\|x\|_2 = 1$, le terme de droite est $\|a\|_2$. Ceci prouve l'inégalité désirée. De plus, on a égalité si et seulement si on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui se produit si et seulement si x et a sont colinéaires. Comme de plus $\|x\|_2 = 1$, on voit qu'il y a égalité si et seulement si $x = \dfrac{\pm 1}{\|a\|_2} a$. $\square$

Exercice 3. — (10 pts) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. On considère $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et pour un tel X on note ${}^tX$ la matrice ligne $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(X, Y) \mapsto {}^tXAY = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$.
On munit $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la norme définie par $\|(X, Y)\| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|, |y_1|, \ldots, |y_n|)$.

(1) Pour tout $(h, k) \in E$, montrer que $|\phi(h, k)| \leq C\|(h, k)\|^2$ pour une constante C que l'on déterminera.

Solution. — (2 pts) On a

$$|\phi(h,k)| = \left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i k_j\right| \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|\ |h_i|\ |k_j| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|\right) \|(h,k)\|^2$$

d'où le résultat demandé, avec $C = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$. $\square$

(2) Pour tout (X, Y) et (h, k) dans E, exprimer $\phi(X + h, Y + k)$ en fonction de X, Y, A, h et k, puis montrer que ϕ est différentiable en (X, Y) et déterminer sa différentielle $D\phi(X, Y) : E \to \mathbb{R}$.

Solution. — (4 pts) L'application $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **bilinéaire**, c.-à-d. linéaire en chacune des variables X et Y. En effet, on a $\phi(\lambda X, \mu Y) = \lambda\mu\phi(X, Y)$ et :

$$\begin{aligned} \phi(X+h, Y+k) &= {}^t(X+h)A(Y+k) = {}^tXAY + {}^thAY + {}^tXAk + {}^thAk \\ &= \phi(X,Y) + \phi(h,Y) + \phi(X,k) + \phi(h,k). \end{aligned}$$

D'après la question 1), on a $|\phi(h, k)| \leq C\|(h, k)\|^2$. Combiné avec l'égalité précédente, ceci montre que ϕ est différentiable en (X, Y) et que sa différentielle $D\phi(X, Y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$D\phi(X,Y)(h,k) = {}^thAY + {}^tXAk = \phi(h,Y) + \phi(X,k).$$

$\square$

(3) Soit u l'application linéaire $\mathbb{R}^n \to E$, $X \mapsto (X, X)$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, déterminer la différentielle $Du(X) : \mathbb{R}^n \to E$.

Solution. — (2 pts) u est linéaire donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $Du(X) = u$. $\square$

(4) Soit $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \phi(u(X)) = {}^tXAX$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, déterminer la différentielle $DQ(X) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Solution. — (2 pts) Comme $Q = \phi \circ u$, on a $DQ(X) = D\phi(X, X) \circ Du(X) = D\phi(X, X) \circ u$, i.e. pour tout $X, h \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$DQ(X)(h) = D\phi(X,X)(h,h) = {}^tXAh + {}^thAX = \phi(h,X) + \phi(X,h).$$

$\square$