TD 11 Devoir du 14 décembre 2018 (durée 1h30)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce devoir est noté sur **20**. Les exercices sont indépendants, le total des points fait 26 et les notes > 20 seront comptées comme 20.

***Exercice 1* (5 pts).** — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(1) (1 pt) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $1 + \mathrm{sh}(x)^2 = \mathrm{ch}(x)^2$.

(2) (4 pts) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, \mathrm{ch}(t))$. Calculer la longueur du chemin $\gamma([0, T])$.

***Exercice 2* (6 pts).** — Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et soit γ le chemin défini en cordonnées polaires par $r(\theta) = e^{-\theta}$, pour $\theta \in [0, T]$.

(1) (2 pts) Pour tout $\theta \in [0, T]$, écrire les coordonnées cartésiennes $(x(\theta), y(\theta))$ du point $\gamma(\theta)$.

(2) (4 pts) Calculer la longueur du chemin $\gamma([0, T])$.

***Exercice 3* (9 pts).** — Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \big(R\cos^5(t), R\sin^5(t)\big)$. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle $\omega(x, y) = \dfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$. On rappelle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

(1) (6 pts) Calculer $\displaystyle\int_\gamma \omega$.

(2) (3 pts) Soit K le compact dont le bord orienté est γ. Calculer l'aire de K.

***Exercice 4* (6 pts).** — Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et K le compact de $\mathbb{R}^2$ défini en coordonnées polaires par l'inégalité $r(\theta) \leq a(1 + \cos\theta)$, pour $\theta \in [-\pi, \pi]$. En utilisant la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, calculer l'aire de K.