TD 11 Devoir du 22 octobre 2018 (durée 1h30)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce devoir est noté sur **20**. Les trois exercices sont indépendants, le total des points fait environ 30 et les notes > 20 seront comptées comme 20.

Exercice 1. — (10,5 pts) On pose $f(x,y) = y^4 - 2x(1+y^2) + 2x^2$.

(1) Justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les points critiques de f. *Indication* : pour un point critique (x,y), on exprimera x en fonction de y puis l'on résoudra l'équation $yP(y) = 0$ où P est un certain polynôme de degré 2.

(3) Déterminer les dérivées partielles secondes de f et écrire la matrice hessienne de f en un point $p = (x,y)$.

(4) Pour chaque point critique p déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local de f ou un point selle.

Exercice 2. — (10,5 pts) Pour tout $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

(1) Démontrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$ et que $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$.

(2) Soient $t_1,\dots,t_n$ des réels. En le justifiant soigneusement, déterminer sous quelles conditions on a $|\sum_{i=1}^n t_i| = \sum_{i=1}^n |t_i|$. Indication : on pourra introduire l'ensemble I (resp. J) des indices i tels que $t_i > 0$ (resp. $t_i < 0$).

On fixe un élément *non nul* $a = (a_1,\dots,a_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

(3) On pose $S_\infty(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$. Pour tout $x \in S_\infty(1)$, montrer que $|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \|a\|_1$. Déterminer, en le justifiant soigneusement, pour quels $x \in S_\infty(1)$ cette inégalité est une égalité.

(4) On pose $S_2(1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. En utilisant un théorème connu, montrer que pour tout $x \in S_2(1)$ on a $|\sum_{i=1}^n a_i x_i| \leq \|a\|_2$ et déterminer pour quels $x \in S_2(1)$ cette inégalité est une égalité.

Exercice 3. — (10 pts) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. On considère $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et pour un tel X on note ${}^tX$ la matrice ligne $(x_1,\dots,x_n)$. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(X,Y) \mapsto {}^tXAY = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$.

On munit $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la norme définie par $\|(X,Y)\| = \max(|x_1|,\dots,|x_n|,|y_1|,\dots,|y_n|)$.

(1) Pour tout $(h,k) \in E$, montrer que $|\phi(h,k)| \leq C\|(h,k)\|^2$ pour une constante C que l'on déterminera.

(2) Pour tout (X,Y) et (h,k) dans E, exprimer $\phi(X+h, Y+k)$ en fonction de X, Y, A, h et k, puis montrer que ϕ est différentiable en (X,Y) et déterminer sa différentielle $D\phi(X,Y) : E \to \mathbb{R}$.

(3) Soit u l'application linéaire $\mathbb{R}^n \to E$, $X \mapsto (X,X)$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, déterminer la différentielle $Du(X) : \mathbb{R}^n \to E$.

(4) Soit $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \phi(u(X)) = {}^tXAX$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, déterminer la différentielle $DQ(X) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.