TD 13 Devoir du 10 novembre 2017 (durée 1h30)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les questions suivantes. Ce devoir est noté sur **25**. Le barème donné est indicatif. Les notes > 25 seront comptées comme 25.

Exercice 1. — (environ 10 pts) Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

(1) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Solution. — On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Soit $p = (x,y)$ dans U, alors $r = \|p\|$ est > 0 et le disque ouvert $B(p,r)$ est contenu dans U, i.e. ne contient pas le point $q = (0,0)$ puisque $d(p,q) = d(q,p) = r$. Ceci montre que U est un ouvert. □

(2) Pour tout $(x,y) \in U$, écrire la matrice jacobienne $Df(x,y)$, puis calculer son déterminant.

Solution. — Pour $(x,y) \in U$, posons $f_1(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ et $f_2(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$; alors on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^2-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

donc la matrice jacobienne est

$$Df(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2-x^2 \end{pmatrix}.$$

Comme, pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ le déterminant de λA est $\lambda^n \operatorname{dét}(A)$, le déterminant de $Df(x,y)$ est :

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^4}\left((y^2-x^2)^2 + 4x^2y^2\right) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{r^4}$$

en posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$. □

Soit $V = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Pour $(r,\theta) \in V$, on pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\dfrac{\cos\theta}{r}, \dfrac{-\sin\theta}{r}\right)$.

(3) Pour tout $(r,\theta) \in V$, écrire la matrice jacobienne $Dg(r,\theta)$, puis calculer son déterminant.

Solution. — On a

$$Dg(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{-\cos\theta}{r^2} & \dfrac{-\sin\theta}{r} \\ \dfrac{\sin\theta}{r^2} & \dfrac{-\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

et son déterminant est $\dfrac{1}{r^3}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \dfrac{1}{r^3}$. □

(4) Exprimer $Dg(r,\theta)$ en fonction de $Df(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et d'une matrice que l'on précisera. Retrouver ainsi le calcul du déterminant de $Df(x,y)$.

Solution. — Pour $(r,\theta) \in V$, posant $h(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, on a $g(r,\theta) = (f \circ h)(r,\theta)$ et donc

$$Dg(r,\theta) = Df(x,y) \circ Dh(r,\theta)$$

où l'on a posé $(x,y) = h(r,\theta)$. Comme on connaît la matrice $Dh(r,\theta)$ et qu'on sait que son déterminant est r, on retrouve que $\text{dét}\, Df(x,y) = \dfrac{1}{r}\, \text{dét}\, Dg(r,\theta) = \dfrac{1}{r^4}$. □

Exercice 2. — (environ 10 pts) Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{R})$. On considère $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et pour un tel X on note ${}^tX$ la matrice ligne $(x_1, \dots, x_n)$. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(X,Y) \mapsto {}^tXAY = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$.
On munit $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la norme définie par $\|(X,Y)\| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|, |y_1|, \dots, |y_n|)$.

(1) Pour tout $(h,k) \in E$, montrer que $|\phi(h,k)| \le C\|(h,k)\|^2$ pour une constante C que l'on déterminera.

Solution. — On a

$$|\phi(h,k)| = \left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i k_j\right| \le \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|\ |h_i|\ |k_j| \le \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|\right) \|(h,k)\|^2$$

d'où le résultat demandé, avec $C = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$. □

(2) Pour tout $(X,Y) \in E$, montrer que ϕ est différentiable en (X,Y) et déterminer sa différentielle $D\phi(X,Y) : E \to \mathbb{R}$.

Solution. — L'application $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **bilinéaire**, c.-à-d. linéaire en chacune des variables X et Y. En effet, on a $\phi(\lambda X, \mu Y) = \lambda\mu\phi(X,Y)$ et :

$$\begin{aligned}\phi(X+h, Y+k) &= {}^t(X+h)A(Y+k) = {}^tXAY + {}^thAY + {}^tXAk + {}^thAk \\ &= \phi(X,Y) + \phi(h,Y) + \phi(X,k) + \phi(h,k).\end{aligned}$$

D'après la question 1), on a $|\phi(h,k)| \le C\|(h,k)\|^2$. Ceci montre que ϕ est différentiable en (X,Y) et sa différentielle $D\phi(X,Y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$D\phi(X,Y)(h,k) = {}^thAY + {}^tXAk = \phi(h,Y) + \phi(X,k).$$

□

(3) Soit $u : \mathbb{R}^n \to E$, $X \mapsto (X,X)$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, déterminer la différentielle $Du(X) : \mathbb{R}^n \to E$.

Solution. — u est linéaire donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $Du(X) = u$. □

(4) Soit $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \phi(u(X)) = {}^tXAX$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, déterminer la différentielle $DQ(X) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Solution. — Comme $Q = \phi \circ u$, on a $DQ(X) = D\phi(X,X) \circ Du(X) = D\phi(X,X) \circ u$, i.e. pour tout $X, h \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$DQ(X)(h) = D\phi(X,X)(h,h) = {}^tXAh + {}^thAX = \phi(h,X) + \phi(X,h).$$

□

Exercice 3. — (environ 10 pts) On pose $f(x,y) = x^6 - 2x^3y + 2y^2 - 2xy + x^2$.

(1) Justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Solution. — f est un polynôme en deux variables, donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc a fortiori de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. □

(2) Déterminer les points critiques de f. *Indication* : pour un point critique (x, y), on exprimera y en fonction de x puis l'on résoudra l'équation $xP(x^2) = 0$ où P est un certain polynôme de degré 2 ayant deux racines dans $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. — On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^5 - 6x^2y - 2y + 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x^3 + 4y - 2x$$

donc (x, y) est un point critique si et seulement si $2y = x + x^3$ et

$$0 = 6x^5 - 3x^2(x^3 + x) - (x^3 + x) + 2x = x(3x^2 - 4x^2 + 1).$$

Le polynôme $P(X) = 3X^2 - 4X + 1$ a 1 comme racine, donc se factorise sous la forme $3(X - 1)(X - t)$ où t est la deuxième racine, donc $t = 1/3$. Donc les points critiques sont donnés par $x = 0$ ou $x = \pm 1$ ou $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Dans chaque cas, on a $y = x(1 + x^2)/2$ donc lorsque $x^2 = 1$ on a $y = x$ et lorsque $x^2 = 1/3$ on a $y = 2x/3$. On obtient donc les points critiques :

$$p_0 = (0,0), \qquad p_1 = (1,1), \qquad p_2 = (-1,-1), \qquad p_3 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big), \qquad p_4 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big).$$

□

(3) Déterminer les dérivées partielles secondes de f et écrire la matrice hessienne de f en un point $p = (x, y)$.

Solution. — On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 30x^4 - 12xy + 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6x^2 - 2.$$

Donc la matrice hessienne de f en un point $p = (x, y)$ est

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 30x^4 - 12xy + 2 & -6x^2 - 2 \\ -6x^2 - 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

(4) Pour chaque point critique p déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local de f ou un point selle.

Solution. — En p_0, la matrice hessienne est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; on a $\mathrm{dét}(A) = 4 > 0$ et $\mathrm{Tr}(A) = 6 > 0$ donc p_0 est un minimum local.

En p_1 et p_2 la matrice hessienne est $B = \begin{pmatrix} 20 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$; on a $\mathrm{dét}(B) = 16 > 0$ et $\mathrm{Tr}(B) = 24 > 0$ donc p_1 (resp. p_2) est un minimum local.

En p_3 et p_4, on a $30x^4 = 10/3$ et $12xy = 6x^2(1 + x^2) = 8/3$ donc la matrice hessienne est

$$C = \begin{pmatrix} 8/3 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a $\mathrm{dét}(C) = (32 - 48)/3 < 0$ donc p_3 et p_4 sont des points selles. □

(5) Déterminez la valeur de f en chaque point critique.

Solution. — On a $f(p_0) = 0 = f(p_1) = f(p_2)$. En p_3 et p_4, on a $2xy = x^2(1+x^2) = \dfrac{4}{9}$ et donc

$$f(p_3) = f(p_4) = \frac{1}{27} - \frac{4}{27} + \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{27}.$$

$\square$