TD 13 Devoir du 15 décembre 2017 (durée 1h30)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les questions suivantes. Ce devoir est noté sur **25**. Le barème donné est indicatif. Les notes > 25 seront comptées comme 25.

Exercice 1. — (environ 10 + 2 pts) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soient $\theta_1 < \theta_2$ dans $]0, \pi[$ et $\varphi_1 < \varphi_2$ dans $]-\pi, \pi[$. On pose

$$\mathscr{C} = \Big\{ \big(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)\big) \mid 0 \le r \le R, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \Big\}.$$

(1) (9 pts) En écrivant soigneusement la formule de changement de variables, calculer le volume V de $\mathscr{C}$ puis les intégrales

$$x_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathscr{C}} x\,dxdydz, \qquad y_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathscr{C}} y\,dxdydz, \qquad z_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathscr{C}} z\,dxdydz.$$

Solution. — L'application $\Phi : (r, \theta, \varphi) \mapsto \Big(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)\Big)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et son déterminant jacobien en tout point (r, θ, φ) est $r^2 \sin\theta$ qui est $\neq 0$ si $r > 0$ et $0 < \theta < \pi$.

Notons $\mathscr{P}$ le pavé fermé $[0, R] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$, alors $\Phi(\mathscr{P}) = \mathscr{C}$. De plus, la restriction de Φ au pavé ouvert $\mathring{\mathscr{P}} =]0, R[\times]\theta_1, \theta_2[\times]\varphi_1, \varphi_2[$ est une bijection de $\mathring{\mathscr{P}}$ sur son image. (En fait, comme $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ et $-\pi < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$, alors Φ est même une bijection de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{C}$.)

Par conséquent, d'après la formule de changement de variable, pour toute application continue $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$, on a :

$$\iiint_{\mathscr{C}} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_{\mathscr{P}} (f \circ \Phi)(r, \theta, \varphi)\, r^2 \sin(\theta)\,drd\theta d\varphi.$$

En particulier, pour la fonction constante $f = 1$, on obtient

$$V = \mathrm{vol}(\mathscr{C}) = \iiint_{\mathscr{C}} 1\,dxdydz = \iiint_{\mathscr{P}} r^2 \sin(\theta)\,drd\theta d\varphi = \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^R (\varphi_2 - \varphi_1)\,\Big[-\cos(\theta)\Big]_{\theta_1}^{\theta_2}$$
$$= \frac{R^3}{3}(\varphi_2 - \varphi_1)(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)).$$

Remarque. Pour $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ et $\varphi_2 = \pi = -\varphi_1$, on retrouve le volume de la boule de centre $O = (0, 0, 0)$ et de rayon R, à savoir $\dfrac{R^3}{3} 4\pi$.

Pour $f(x, y, z) = x$, on obtient :

$$V x_G = \iiint_{\mathscr{P}} r\sin(\theta)\cos(\varphi)\, r^2 \sin(\theta)\,drd\theta d\varphi = \frac{R^4}{4}(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2(\theta)\,d\theta.$$

Comme $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ d'où $\sin^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$, l'intégrale ci-dessus vaut

$$\Big[\frac{\theta}{2} - \frac{\cos(2\theta)}{4}\Big]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{2(\theta_2 - \theta_1) - \sin(2\theta_2) + \sin(2\theta_1)}{4}$$

et donc

$$x_G = \frac{3R}{16} \frac{\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)}{\varphi_2 - \varphi_1} \frac{2(\theta_2 - \theta_1) - \sin(2\theta_2) + \sin(2\theta_1)}{\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} V y_G &= \iiint_{\mathscr{P}} r\sin(\theta)\sin(\varphi)\, r^2\sin(\theta)\, dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{R^4}{4}(\cos(\varphi_1)-\cos(\varphi_2))\frac{2(\theta_2-\theta_1)-\sin(2\theta_2)+\sin(2\theta_1)}{4} \end{aligned}$$

et donc

$$y_G = \frac{3R}{16}\frac{\cos(\varphi_1)-\cos(\varphi_2)}{\varphi_2-\varphi_1}\frac{2(\theta_2-\theta_1)-\sin(2\theta_2)+\sin(2\theta_1)}{\cos(\theta_1)-\cos(\theta_2)}.$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned} V z_G = \iiint_{\mathscr{P}} r\cos(\theta)\, r^2\sin(\theta)\, dr d\theta d\varphi &= \frac{R^4}{4}(\varphi_2-\varphi_1)\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sin(2\theta)}{2}\, d\theta \\ &= \frac{R^4}{16}(\varphi_2-\varphi_1)(\cos(2\theta_1)-\cos(2\theta_2)) \end{aligned}$$

et donc

$$z_G = \frac{3R}{16}\frac{\cos(2\theta_1)-\cos(2\theta_2)}{\cos(\theta_1)-\cos(\theta_2)}.$$

□

(2) (1 pt) Soit Σ l'intersection de $\mathscr{C}$ avec la sphère de centre $O=(0,0,0)$ et de rayon R. En considérant $\mathscr{C}$ comme un « cône », pouvez-vous suggérer quelle est l'aire A de Σ ?

Solution. — Si on peut considérer $\mathscr{C}$ comme un « cône » de sommet O et de base Σ, alors son volume doit être égal à un tiers de la hauteur fois l'aire A de Σ, soit $V = RA/3$ d'où

$$A = \frac{3V}{R} = R^2(\varphi_2-\varphi_1)(\cos(\theta_1)-\cos(\theta_2)).$$

□

(3) (bonus 2 pts) Calculez, en le justifiant, l'aire de la surface paramétrée Σ. Cela est-il conforme à votre suggestion ?

Solution. — On a vu en cours que « l'élément de surface infinitésimal » de la surface paramétrée Σ est $R^2\sin(\theta)\, d\theta d\varphi$. Par conséquent on a

$$A = \iint_{[\theta_1,\theta_2]\times[\varphi_1,\varphi_2]} R^2\sin(\theta)\, d\theta d\varphi = R^2(\varphi_2-\varphi_1)(\cos(\theta_1)-\cos(\theta_2))$$

et l'on retrouve bien la valeur suggérée à la question précédente. □

Exercice 2. — (environ 11 pts) Soit $R\in\mathbb{R}_+^*$ et soit $\Gamma : [0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto\Gamma(t) = \big(R\cos^3(t), R\sin^3(t)\big)$.

(1) (1 pt) Montrer que pour $t\in[0,\pi/2]$, on a $0\le\cos^3(t)+\sin^3(t)\le\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$. Montrer de même que pour $t\in[\pi/2,\pi]$, on a $0\le\sin^3(t)-\cos^3(t)\le 1$.

Solution. — Pour $t\in[0,\pi/2]$, on a $0\le\cos(t)\le 1$ et $0\le\sin(t)\le 1$ donc en multipliant par $\cos^2(t)$ (resp. par $\sin^2(t)$) on obtient

$$0\le\cos^3(t)\le\cos^2(t) \qquad \text{et} \qquad 0\le\sin^3(t)\le\sin^2(t)$$

et donc $0\le\cos^3(t)+\sin^3(t)\le 1$. De même, pour $t\in[\pi/2,\pi]$, on a $0\le\sin(t)\le 1$ et $0\le-\cos(t)\le 1$ donc en multipliant par $\sin^2(t)$ (resp. par $\cos^2(t)$) on obtient

$$0\le\sin^3(t)\le\sin^2(t) \qquad \text{et} \qquad 0\le-\cos^3(t)\le\cos^2(t)$$

d'où $0\le\sin^3(t)-\cos^3(t)\le 1$. □

(2) (1 pt) En tenant compte de la question précédente, dessinez soigneusement l'allure de la courbe paramétrée Γ.

Solution. — Pour $t \in [0, \pi/2]$, Γ joint le point $(R, 0)$ au point $(0, R)$, en restant en-dessous de la droite d'équation $x + y = R$. Puis, pour $t \in [\pi/2, \pi]$, Γ joint le point $(0, R)$ au point $(-R, 0)$, en restant en-dessous de la droite d'équation $y - x = R$. Puis, comme $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ et $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$, le reste de la courbe se déduit de ce qui précède par la symétrie centrale par rapport au point O. Cette courbe s'appelle une astroïde ; pour voir une jolie figure, cherchez « astroïde » sur internet. □

(3) (6 pts) Soit K le compact délimité par Γ. Déterminer l'aire de K en calculant $\int_\Gamma \omega$, pour une forme différentielle ω bien choisie, puis en utilisant la formule de Green-Riemann.

Solution. — Si $\omega(x, y) = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$, la formule de Green-Riemann donne :

$$\int_\Gamma \omega = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (x, y)\, dxdy.$$

Ici, pour calculer l'aire A de K, on veut que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Des choix naturels sont : $\omega_1 = x\, dy$ ou $\omega_2 = -y\, dx$ ou

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(x\, dy - y\, dx).$$

Comme $\Gamma'(t) = \begin{pmatrix} -3R\cos^2(t)\sin(t) \\ 3R\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix}$ on voit que le choix 1 (resp. le choix 2) conduit à l'intégrale

$$3R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^4(t)\, dt \qquad \text{resp.} \qquad 3R^2 \int_0^{2\pi} \sin^4(t)\cos^2(t)\, dt$$

tandis que le choix 3 conduit à l'intégrale plus simple

$$\frac{3R^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)\, dt = \frac{3R^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt.$$

Comme $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, d'où $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$, ceci est égal à

$$\frac{3R^2}{16} \int_0^{2\pi} \big(1 - \cos(4t)\big)\, dt = \frac{3R^2}{8}\pi.$$

□

(4) (3 pts) (*Cette question est indépendante de la précédente.*) Soit $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \Gamma(t)$ le premier quart de Γ. Calculer la longueur $L(\gamma)$ du chemin γ.

Solution. — On a vu en cours que

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi/2} \|\gamma'(t)\|\, dt$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne. On a calculé $\gamma'(t)$ dans la question précédente et l'on voit que

$$\|\gamma'(t)\|^2 = (3R)^2(\cos(t)\sin(t))^2 = \frac{(3R)^2}{4}\sin^2(2t).$$

Pour $t \in [0, \pi/2]$ on a $\sin(2t) \geq 0$ donc la racine carrée de l'expression ci-dessus est $\dfrac{3R}{2}\sin(2t)$. On a donc

$$L(\gamma) = \frac{3R}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,dt = \frac{3R}{2}\Big[\frac{-\cos(2t)}{2}\Big]\,dt = \frac{3R}{2}.$$

Remarque. On montre de façon analogue que la longueur totale de l'astroïde est $4 \times \dfrac{3R}{2} = 6R$. □

Exercice 3. — (environ 6 pts) Soit v le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par $v(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + e^y \\ x^2 + ye^y \end{pmatrix}$.

(1) (1 pt) En intégrant par parties, déterminer une primitive de la fonction $f : t \mapsto te^t$.

Solution. — En posant $u = t$ et $v' = e^t$, on a $u' = 1$ et $v = e^t$ d'où

$$\int_0^x te^t dt = \big[te^t\big]_0^x - \int_0^x e^t\,dt = xe^x - e^x$$

donc une primitive de f est $F : x \mapsto (x-1)e^x$. □

(2) (1 pt + 1 pt) Soit $\mathscr{C}$ la portion de la parabole d'équation $x = y^2$ allant du point $(0,0)$ jusqu'au point $(4,2)$. Faire une figure représentant soigneusement $\mathscr{C}$ puis déterminer une paramétrisation $\gamma : [0,2] \to \mathscr{C}$ de $\mathscr{C}$.

Solution. — On laisse la figure au soin du lecteur. Une paramétrisation de $\mathscr{C}$ est donnée par $\gamma : [0,2] \to \mathscr{C}$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$. □

(3) (3 pts) Calculer la circulation de v le long de γ.

Solution. — Pour $t \in [0,2]$ on a $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$, d'où $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$$v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 + e^t \\ t^4 + te^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} = 5t^4 + 3te^t.$$

Donc , d'après la question précédente,

$$\oint_\gamma v = \int_0^2 (5t^4 + 3te^t)dt = \Big[t^5 + 3(t-1)e^t\Big]_0^2 = 32 + 3e^2 + 3 = 35 + 3e^2.$$

□