TD 13 Devoir du 10 novembre 2017 (durée 1h30)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les questions suivantes. Ce devoir est noté sur **25**. Le barème donné est indicatif. Les notes > 25 seront comptées comme 25.

Exercice 1. — (environ 10 pts) Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

(1) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(2) Pour tout $(x,y) \in U$, écrire la matrice jacobienne $Df(x,y)$, puis calculer son déterminant.

Soit $V = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Pour $(r,\theta) \in V$, on pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\dfrac{\cos\theta}{r}, \dfrac{-\sin\theta}{r}\right)$.

(3) Pour tout $(r,\theta) \in V$, écrire la matrice jacobienne $Dg(r,\theta)$, puis calculer son déterminant.

(4) Exprimer $Dg(r,\theta)$ en fonction de $Df(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et d'une matrice que l'on précisera. Retrouver ainsi le calcul du déterminant de $Df(x,y)$.

Exercice 2. — (environ 10 pts) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. On considère $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et pour un tel X on note ${}^tX$ la matrice ligne $(x_1, \dots, x_n)$. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(X,Y) \mapsto {}^tXAY = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} y_j$.

On munit $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de la norme définie par $\|(X,Y)\| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|, |y_1|, \dots, |y_n|)$.

(1) Pour tout $(h,k) \in E$, montrer que $|\phi(h,k)| \leq C\|(h,k)\|^2$ pour une constante C que l'on déterminera.

(2) Pour tout $(X,Y) \in E$, montrer que ϕ est différentiable en (X,Y) et déterminer sa différentielle $D\phi(X,Y) : E \to \mathbb{R}$.

(3) Soit $u : \mathbb{R}^n \to E$, $X \mapsto (X,X)$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, déterminer la différentielle $Du(X) : \mathbb{R}^n \to E$.

(4) Soit $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \mapsto \phi(u(X)) = {}^tXAX$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, déterminer la différentielle $DQ(X) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exercice 3. — (environ 10 pts) On pose $f(x,y) = x^6 - 2x^3y + 2y^2 - 2xy + x^2$.

(1) Justifier brièvement, sans calculs, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer les points critiques de f. *Indication* : pour un point critique (x,y), on exprimera y en fonction de x puis l'on résoudra l'équation $xP(x^2) = 0$ où P est un certain polynôme de degré 2 ayant deux racines dans $\mathbb{R}_+^*$.

(3) Déterminer les dérivées partielles secondes de f et écrire la matrice hessienne de f en un point $p = (x,y)$.

(4) Pour chaque point critique p déterminer, en le justifiant soigneusement, si p est ou non un minimum ou maximum local de f ou un point selle.

(5) Déterminez la valeur de f en chaque point critique.