TD 13 Devoir du 15 décembre 2017 (durée 1h30)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les exercices sont indépendants. Dans chacun d'eux, on pourra admettre une question pour faire les questions suivantes. Ce devoir est noté sur **25**. Le barème donné est indicatif. Les notes > 25 seront comptées comme 25.

Exercice 1. — (environ 10 + 2 pts) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soient $\theta_1 < \theta_2$ dans $]0, \pi[$ et $\varphi_1 < \varphi_2$ dans $]-\pi, \pi[$. On pose

$$\mathscr{C} = \big\{\big(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)\big) \mid 0 \le r \le R, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\big\}.$$

(1) (9 pts) En écrivant soigneusement la formule de changement de variables, calculer le volume V de $\mathscr{C}$ puis les intégrales

$$x_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathscr{C}} x\,dxdydz, \qquad y_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathscr{C}} y\,dxdydz, \qquad z_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathscr{C}} z\,dxdydz.$$

(2) (1 pt) Soit Σ l'intersection de $\mathscr{C}$ avec la sphère de centre $O = (0,0,0)$ et de rayon R. En considérant $\mathscr{C}$ comme un « cône », pouvez-vous suggérer quelle est l'aire A de Σ ?

(3) (bonus 2 pts) Calculez, en le justifiant, l'aire de la surface paramétrée Σ. Cela est-il conforme à votre suggestion ?

Exercice 2. — (environ 11 pts) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \Gamma(t) = \big(R\cos^3(t), R\sin^3(t)\big)$.

(1) (1 pt) Montrer que pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \le \cos^3(t)+\sin^3(t) \le \cos^2(t)+\sin^2(t) = 1$. Montrer de même que pour $t \in [\pi/2, \pi]$, on a $0 \le \sin^3(t) - \cos^3(t) \le 1$.

(2) (1 pt) En tenant compte de la question précédente, dessinez soigneusement l'allure de la courbe paramétrée Γ.

(3) (6 pts) Soit K le compact délimité par Γ. Déterminer l'aire de K en calculant $\displaystyle\int_\Gamma \omega$, pour une forme différentielle ω bien choisie, puis en utilisant la formule de Green-Riemann.

(4) (3 pts) (*Cette question est indépendante de la précédente.*) Soit $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \Gamma(t)$ le premier quart de Γ. Calculer la longueur $L(\gamma)$ du chemin γ.

Exercice 3. — (environ 6 pts) Soit v le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par $v(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + e^y \\ x^2 + ye^y \end{pmatrix}$.

(1) (1 pt) En intégrant par parties, déterminer une primitive de la fonction $f : t \mapsto te^t$.

(2) (1 pt + 1 pt) Soit $\mathscr{C}$ la portion de la parabole d'équation $x = y^2$ allant du point $(0,0)$ jusqu'au point $(4,2)$. Faire une figure représentant soigneusement $\mathscr{C}$ puis déterminer une paramétrisation $\gamma : [0,2] \to \mathscr{C}$ de $\mathscr{C}$.

(3) (3 pts) Calculer la circulation de v le long de γ.