TD 2. Ouverts et fermés, applications continues, adhérence et intérieur.

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours ; ce sont des compétences attendues de tous et toutes. Les exercices avec (*) sont un peu plus avancés, et préparent parfois à des paragraphes ultérieurs du cours. Enfin, ceux avec (**) peuvent être considérés comme des compléments de cours et sont réservés aux étudiant(e)s les plus motivé(e)s.

Exercice 1. Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $x \in E$, montrer que le singleton $\{x\}$ est un sous-ensemble fermé de E.

Exercice 2. On se place dans $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle définie par $d(x, y) = |y - x|$.

1) Montrer que tout intervalle $]a, b[$ (avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) est ouvert.
2) Pour a, b dans $\mathbb{R}$, montrer que les intervalles $]-\infty, b]$, $[a, b]$ et $[a, +\infty[$ sont fermés.
3) Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ possédant un plus grand élément b (i.e. I est de la forme $]-\infty, b]$ ou $]a, b]$ ou $[a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$). Montrer que I n'est pas ouvert.
4) Montrer de même que si I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ possédant un plus petit élément a, alors I n'est pas ouvert.
5) Donner la liste de tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, puis de tous les intervalles fermés.
6) Quels sont les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouverts et fermés ?
7) (**) Quelles sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont à la fois ouverts et fermés ?

Exercice 3. Représenter graphiquement les ensembles suivants et déterminer s'ils sont ouverts, fermés ou ni l'un ni l'autre.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\} \ ; \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\} \ ;$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |x| < 1, \ |y| \leq 1\} \ ; \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 < 4\}.$$

Exercice 4. 1) Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils ouverts ? fermés ?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \sin(y) \leq 4\} \ ; \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\}.$$

2) (**) Même question pour le groupe des matrices inversibles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, qui est un sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^q$, où $q = n^2$.

Exercice 5. Soit (E, d) un espace métrique.

1) Montrer que :
   a) Toute réunion (finie ou infinie) d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
   b) Toute intersection *finie* d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
2) Dans $\mathbb{R}$, donner l'exemple d'une suite décroissante $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'ouverts dont l'intersection n'est pas un ouvert.
3) Énoncer et démontrer les propriétés correspondantes pour les fermés.

Exercice 6 (*)**.** Soit N une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on note $B(a,r)$ (resp. $\overline{B}(a,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r.

1) Montrer que l'adhérence de $B(a,r)$ est $\overline{B}(a,r)$
2) Montrer que l'intérieur de $\overline{B}(a,r)$ est $B(a,r)$.
3) Quelle est la frontière de $B(a,r)$?

Exercice 7 (**)**.** Soit E un ensemble quelconque. Montrer que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(x,x) = 0$ et $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ est une distance sur E. Montrer par des contre-exemples que les propriétés 1) et 2) de l'exercice 6 ne sont pas toujours vérifiées.

Exercice 8 (*)**.** On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est **dense** si son adhérence est $\mathbb{R}^n$ tout entier.

1) Montrer que A est dense ssi tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ contient au moins un point de A.
2) Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\mathbb{Q}^2$ est dense dans $\mathbb{R}^2$. (Considérer une boule pour la norme N_∞.)

Exercice 9 (Segments et parties convexes (*))**.** Soient $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^n$. Le vecteur joignant x à y est $y - x$ et l'on définit le **segment** $[x,y]$ comme l'ensemble des $z \in \mathbb{R}^n$ qui sont entre x et y sur la droite (xy), c.-à-d. :

$$[x,y] = \{x + t(y-x) \mid t \in [0,1]\} = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}.$$

On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^n$ est **convexe** si pour tout $x \neq y$ dans C, le segment $[x,y]$ est contenu dans C.

1) Montrer que $[x,y]$ est égal à $[y,x] = \{y + s(x-y) \mid s \in [0,1]\} = \{(1-s)y + sx \mid s \in [0,1]\}$.
2) Quelles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$?
3) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que les boules $B_N(a,R)$ et $\overline{B}_N(a,R)$ sont convexes.