TD3. Applications différentiables

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours ; ce sont des compétences attendues de tous et toutes. Les exercices avec (*) sont un peu plus avancés, et préparent parfois à des paragraphes ultérieurs du cours. Enfin, ceux avec (**) peuvent être considérés comme des compléments de cours et sont réservés aux étudiant(e)s les plus motivé(e)s.

Exercice 1 (Cours)**.** Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application $U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.

1) Rappeler la définition de : « f est différentiable en a ».
2) Montrer que si f est différentiable en a, alors f est continue en a.
3) On suppose f différentiable en a et l'on note $Df(a)$ sa différentielle en a. Pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, exprimez $Df(a)(h)$ en fonction des h_i et $(\partial f/\partial x_i)(a)$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Exercice 2. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminez son domaine de définition, ses dérivées partielles, et si f est différentiable.

$$f_1 : (x,y) \mapsto \sqrt{\frac{2x+3}{y-2}} \ ; \qquad f_2 : (x,y) \mapsto \ln(x+y+1) \ ; \qquad f_3 : (x,y) \mapsto \frac{1}{\sin(x-y)} \ .$$

Exercice 3 (Cours)**.**

1) Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que f est différentiable en a et que g l'est en $f(a)$. Rappelez la formule donnant la différentielle $D(g \circ f)(a)$ de $g \circ f$ en a.
2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
   a) On suppose f différentiable en a. Montrer alors que f est dérivable en a et exprimer sa différentielle $Df(a)$ en fonction de $f'(a)$.
   b) Réciproquement, on suppose f dérivable en a. Montrer alors que f est différentiable en a et exprimer sa différentielle $Df(a)$ en fonction de $f'(a)$.
3) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable et soit $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$. Pour tout $x \in U$, on pose $g(x) = 1/f(x)$.
   a) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
   b) Pour tout $a \in U$, montrer que g est différentiable en a, de différentielle $Dg(a) = \dfrac{-1}{f(a)^2} Df(a)$.

Exercice 4. On considère les applications $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(0,0) = 0 = g(0,0)$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \ ; \qquad g(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

1) Montrer que f et g sont différentiables sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Indication : on pourra soit calculer les dérivées partielles de f et g, soit utiliser l'exercice 3 et le fait que les applications somme et produit, de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, sont différentiables.
2) (*) On pose $a = (0,0)$. Montrer que $(\partial f/\partial x)(a)$ et $(\partial f/\partial y)(a)$ existent. Si f était différentiable, que serait $Df(a)$? Montrer que f n'est pas différentiable en a. Montrer que f est continue en a. Est-ce que $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ le sont ? Montrer que f admet en a des dérivées partielles selon tout vecteur v. Qu'en conclut-on ?
3) Montrer que g est différentiable en $a = (0,0)$.

Exercice 5 (Cours)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ et soient $f_1, \dots, f_p$ les composantes de f. Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

existe dans $\mathbb{R}^p$. Dans ce cas, elle est notée $f'(a)$ et l'on dit que c'est le vecteur dérivé de f en a.

1) Montrer que f est dérivable en a si et seulement si chaque f_i l'est.
2) Montrer que f dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a et exprimer alors la différentielle $Df(a)$ en fonction de $f'(a)$.
3) Soit $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application différentiable. On suppose f dérivable en a. Montrer alors que $g \circ f$ est dérivable en a et déterminer le vecteur dérivé $(g \circ f)'(a)$. Indication : on pourra utiliser la question précédente et l'exercice 3.

Exercice 6. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Pour chacune des fonctions f suivantes, exprimez $\partial_x f$ et $\partial_y f$ en fonction des dérivées partielles de h :

$$f_1(x, y) = h(x - y, x + y), \qquad f_2(x, y) = h(x^2 + y^2, xy).$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta)$. Exprimez $\partial g/\partial r$ et $\partial g/\partial\theta$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 8. Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3, -2x_1 - x_1x_2x_3, 2x_1x_3 + x_2^2)$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(y_1, y_2, y_3) \mapsto (e^{y_1+y_2+y_3}, \cos(y_1))$. Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$, écrire la matrice jacobienne en x de $h = g \circ f$.

Exercice 9. Soit $P(x, y)$ un polynôme homogène de degré n en deux variables x, y, c.-à-d. $P(x, y) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + a_1xy^{n-1} + a_0y^n$ pour certains réels $a_n, \dots, a_0$.

1) Montrer que $x\partial_x P(x, y) + y\partial_y P(x, y) = nP(x, y)$.
2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$.

Plus généralement, soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est *homogène de degré* s si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $f(tx, ty) = t^s f(x, y)$.

1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homogène de degré $s > 0$ et de classe C^1.
   a) Montrer que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont homogènes de degré $s - 1$.
   b) (*) Montrer que f vérifie l'équation d'Euler en degré s, c'est-à-dire :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x\partial_x f(x, y) + y\partial_y f(x, y) = sf(x, y).$$
2) (**) Réciproquement, on suppose que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie l'équation d'Euler ci-dessus. Montrer alors que f est homogène de degré s. Indication : pour (x, y) fixé, considérer l'application $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(tx, ty)/t^s$.

Exercice 10 (Segments et parties convexes (*))**.** Soient $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^n$. Le vecteur joignant x à y est $y - x$ et l'on définit le **segment** $[x, y]$ comme l'ensemble des $z \in \mathbb{R}^n$ qui sont entre x et y sur la droite (xy), c.-à-d. :

$$[x, y] = \{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\} = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}.$$

On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^n$ est **convexe** si pour tout $x \neq y$ dans C, le segment $[x, y]$ est contenu dans C.

1) Montrer que $[x, y]$ est égal à $[y, x] = \{y + s(x - y) \mid s \in [0, 1]\} = \{(1 - s)y + sx \mid s \in [0, 1]\}$.
2) Quelles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$?
3) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que les boules $B_N(a, R)$ et $\overline{B}_N(a, R)$ sont convexes.