TD4. Matrices hessiennes et recherche d'extrema

version du 22/10/2017

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours ; ce sont des compétences attendues de tous et toutes. Les exercices avec (*) sont un peu plus avancés, et préparent parfois à des paragraphes ultérieurs du cours. Enfin, ceux avec (**) peuvent être considérés comme des compléments de cours et sont réservés aux étudiant(e)s les plus motivé(e)s.

Exercice 1. Trouvez les points critiques des fonctions suivantes. Pour chaque point critique, écrivez la matrice hessienne et déterminez si en ce point f a un minimum ou maximum local ou un point selle :

1) $f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$;
2) $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$;

Exercice 2. On pose $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$.

1) Déterminez les points critiques de f.
2) Sans utiliser la matrice hessienne, déterminez si f a un minimum ou maximum local ou global en ces points.
3) Écrire la matrice hessienne en un point critique. Quel est son déterminant ? Cela donne-t-il une information suffisante pour la recherche d'extrema ?

Exercice 3 (*). Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et σ la symétrie orthogonale qui échange e_1 et e_2 et laisse fixe e_3.

1) Écrire la matrice de σ dans la base $\mathcal{B}$.
2) Soient $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$. Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, e_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
3) Écrire la matrice de σ dans la base $\mathcal{C}$.

   On pose $f(x, y, z) = \dfrac{\cos(2x)\sin(y) + z^2}{2}$.
4) Montrer que les points critiques de f sont les points vérifiant l'une des conditions suivantes :

$$(I) \qquad z = 0, \quad y = k\pi, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \ell\pi, \quad \text{avec } k, \ell \in \mathbb{Z}$$

$$(II) \qquad z = 0, \quad 2x = k\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + \ell\pi, \quad \text{avec } k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

5) Écrire la matrice hessienne dans le cas (I). En déduire, en utilisant les questions précédentes, que dans ce cas le point critique n'est ni un minimum ni un maximum local, mais est un « point selle ».
6) Écrire la matrice hessienne dans le cas (II). En discutant suivant la parité de k et ℓ, déterminez si f admet un minimum ou maximum local, ou un « point selle ».

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - xy^2$.

1) Montrer que $(0, 0)$ est le seul point critique de f.

2) Écrire la matrice hessienne de f est $(0,0)$. Cela permet-il de décider si f a en ce point un extremum local ?

   Noter que la restriction de f à la droite $x = 0$ est la fonction $y \mapsto f(0,y) = 0$, qui est identiquement nulle.

3) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la restriction f_a de f à la droite d'équation $y = ax$, i.e. f_a est la fonction $x \mapsto f(x,ax) = x^2 - ax^3$. Montrer que f_a admet en $x = 0$ un minimum local.
4) En factorisant $f(x,y)$ en $f(x,y) = x(x-y^2)$, déterminez pour quels $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) = 0$, resp. $f(x,y) > 0$, resp. $f(x,y) < 0$. Représenter graphiquement les régions du plan où f est nulle, resp. > 0, resp. < 0.
5) Montrer que le point $(0,0)$ n'est pas un extremum local de f.

Exercice 5. Quel est le point du plan d'équation $(2x - y + z = 16)$ le plus proche de l'origine ? Indication : montrer que ceci revient à déterminer le minimum d'une fonction de deux variables que l'on déterminera.

Exercice 6. Écrire le développement limité à l'ordre 2 des fonctions f au point (x_0, y_0) et déterminer si le point est un point critique. S'il s'agit d'un point critique, déterminez si c'est un minimum ou maximum local ou un point selle, sans nécessairement utiliser la matrice hessienne.

1) $f(x,y) = \sin(x+2y),\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
2) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1},\ (x_0,y_0) = (0,0)$;
3) $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y,\ (x_0,y_0) = (1,0)$.

Exercice 7. Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

1) Déterminer les points critiques de f.
2) En chaque point critique, écrire la matrice hessienne de f et déterminer s'il s'agit d'un minimum ou maximum local ou d'un point selle.
3) Développer $(y + \frac{x}{2})^2$ puis écrire $f(x,y) + 9$ comme la somme de deux carrés. Retrouver ainsi le résultat de la question précédente et préciser s'il s'agit d'un minimum ou maximum global.

Exercice 8 (*). (repris de la feuille 3) Soient $x \neq y$ dans $\mathbb{R}^n$. Le vecteur joignant x à y est $y - x$ et l'on définit le **segment** $[x,y]$ comme l'ensemble des $z \in \mathbb{R}^n$ qui sont entre x et y sur la droite (xy), c.-à-d. :

$$[x,y] = \{x + t(y-x) \mid t \in [0,1]\} = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}.$$

On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}^n$ est **convexe** si pour tout $x \neq y$ dans C, le segment $[x,y]$ est contenu dans C.

1) Montrer que $[x,y]$ est égal à $[y,x] = \{y + s(x-y) \mid s \in [0,1]\} = \{(1-s)y + sx \mid s \in [0,1]\}$.
2) Quelles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$?
3) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que les boules $B_N(a,R)$ et $\overline{B}_N(a,R)$ sont convexes.

Exercice 9 (*). On rappelle que Arctan : $\mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est dérivable et $\mathrm{Arctan}'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soient $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \mathrm{Arctan}(y/x)$.

1) Calculer les dérivées partielles de f et, en citant un résultat du cours, montrer que f est de classe C^1 sur U.

Pour tout $(x,y) \in U$ on pose[1] : $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (\partial f/\partial x)(x,y) \\ (\partial f/\partial y)(x,y) \end{pmatrix}$. D'autre part, on pose $V = \{(x,y) \in U \mid x^2+y^2 > 1\}$.

2) Pour tout $(x,y) \in V$, montrer que $\|\nabla f(x,y)\|_2 < 1$ (où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne).

Soient $A = (\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda\sqrt{3}}{2})$ et $B = (\frac{\lambda}{2}, \frac{-\lambda\sqrt{3}}{2})$, où λ est un réel tel que $1 < \lambda < \frac{2}{\sqrt{3}}$.

3) Faire un dessin représentant approximativement V et les points A, B.

4) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$ puis montrer que $f(A) - f(B) > \|\overrightarrow{AB}\|_2$.

5) L'ouvert V est-il convexe ? Justifier votre réponse.

6) Cet exercice montre que dans un théorème vu en cours on ne peut omettre une certaine hypothèse. Pouvez-vous dire quels sont le théorème et l'hypothèse en question ?

Exercice 10 (**)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1) Étudier les extrema locaux de f.

2) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Montrer que f admet un maximum M et un minimum m sur D.

3) Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors $x^2+y^2 = 1$.

4) Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.

1. Se prononce « nabla » f et est appelé le **gradient** de f en (x,y).