TD5. Intégrales dépendant d'un paramètre et intégrales multiples

version du 10/11/2017

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours ; ce sont des compétences attendues de tous et toutes. Les exercices avec (*) sont un peu plus avancés, et préparent parfois à des paragraphes ultérieurs du cours. Enfin, ceux avec (**) peuvent être considérés comme des compléments de cours et sont réservés aux étudiant(e)s les plus motivé(e)s.

On rappelle le résultat suivant :

Théorème. *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g : [a, b] \times U \to \mathbb{R}, (s, x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(s, x_1, \ldots, x_n)$ une application continue. On suppose que, pour $i = 1, \ldots, n$, la dérivée partielle $\partial g/\partial x_i$ existe et est continue sur $[a, b] \times U$. Alors l'application*

$$G : [a, b] \times U \to \mathbb{R}, \qquad (t, x_1, \ldots, x_n) \mapsto \int_a^t g(s, x_1, \ldots, x_n) ds$$

est continue et est de classe C^1 sur l'ouvert $]a, b[\times U$: on a $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t, x_1, \ldots, x_n) = g(t, x_1, \ldots, x_n)$ et, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(t, x_1, \ldots, x_n) = \int_a^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x_1, \ldots, x_n) ds.$$

Exercice 1. Soient $a < b$ et $c < d$ dans $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : [a, b] \times [c, d] \times U \to \mathbb{R}, (s, t, x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(s, t, x_1, \ldots, x_n)$ une application continue. Pour tout $x \in U$ pose

$$\phi(x) = \int_c^d \left(\int_a^b f(s, t, x) ds \right) dt.$$

Pour alléger l'écriture, on fixe $x \in U$ et pour tout $s \in [a, b]$ et $t \in [c, d]$ on pose $g(s, t) = f(s, t, x)$, puis

$$G(s) = \int_c^d \left(\int_a^s g(\sigma, t) d\sigma \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^s f(\sigma, t, x) d\sigma \right) dt.$$

1) En utilisant le théorème rappelé plus haut, déterminer $G'(s)$ pour tout $s \in [a, b]$.
2) En utilisant le « théorème fondamental du calcul intégral » (vu en Terminale), montrer que :

$$\phi(x) = G(b) - G(a) = \int_a^b \left(\int_c^d f(s, t, x) dt \right) ds.$$

Notons $\mathcal{R}$ le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$. Par définition, l'intégrale précédente sera notée

$$\phi(x) = \iint_{\mathcal{R}} f(s, t, x) ds\, dt.$$

En particulier, pour $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ continue, le réel $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(s, t, x) ds\, dt$ est appelé l'intégrale de f sur $\mathcal{R}$.

Exercice 2. Soient $a < b$ et $c < d$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{R}$ le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer $m = \displaystyle\iint_{\mathcal{R}} dx\, dy$ (c.-à-d. l'intégrale sur $\mathcal{R}$ de la fonction constante de valeur 1).
2) Calculer $J_1 = \displaystyle\iint_{\mathcal{R}} x\, dx\, dy$ et $J_2 = \displaystyle\iint_{\mathcal{R}} y\, dx\, dy$.
3) Calculer $x_{\mathcal{R}} = J_1/m$ et $y_{\mathcal{R}} = J_2/m$. Connaissez-vous la signification « physique » de m, $x_{\mathcal{R}}$ et $y_{\mathcal{R}}$?
4) Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, calculer $I(p, q) = \displaystyle\iint_{\mathcal{R}} x^p y^q\, dx\, dy$.

Exercice 3 (*)**.** Soit S_n le groupe des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même. On dit que c'est le « **groupe symétrique** » S_n. Tout élément de S_n s'appelle une **permutation** de $\{1, \dots, n\}$ et peut se représenter sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

où i_k désigne l'image de k, pour tout $k = 1, \dots, n$. Pour $\sigma, \tau \in S_n$, leur produit $\sigma\tau$ est la composée $\sigma \circ \tau$ (où l'on applique d'abord τ puis σ).

1) Soient $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $\tau\theta$, $\theta\tau$.

   On dit qu'une permutation σ est une **transposition** s'il existe $i \neq j$ dans $\{1, \dots, n\}$ tels que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ et $\sigma(k) = k$ pour $k \neq i, j$. Dans ce cas, on écrit $\sigma = (i, j)$. Pour $i = 1, \dots, n-1$, on note s_i la transposition $(i, i+1)$ et l'on dira qu'un telle transposition est *spéciale.* [1]

2) Parmi les permutations σ, τ, θ, y a-t-il des transpositions ?

3) Fixons $\sigma \in S_n$; soit i l'unique élément de $\{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma(i) = n$. Supposons $i < n$ et posons $p = \sigma(i+1)$, alors σ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & n & p & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

   Déterminer σs_i.

4) Montrer qu'il existe des transpositions spéciales $\tau_1, \cdots \tau_k$ telles que $\sigma' = \sigma\tau_1 \cdots \tau_k$ vérifie $\sigma'(n) = n$.

5) Si τ est une transposition, quelle est son inverse τ^{-1} ?

6) En procédant par récurrence sur n, montrer que pour tout $\sigma \in S_n$ il existe des transpositions spéciales $\tau_1, \cdots, \tau_N$ telles que $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_N$.

On admet le :

Théorème (Formule de changement de variables)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, $\mathcal{P}$ un pavé fermé contenu dans U, et $\mathring{\mathcal{P}}$ l'intérieur de $\mathcal{P}$ (i.e. le pavé ouvert correspondant). On suppose que la restriction de ϕ à $\mathring{\mathcal{P}}$ est un difféomorphisme de $\mathring{\mathcal{P}}$ sur son image. Alors, pour toute application continue $f : \phi(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}$ on a*

$$\iint_{\phi(\mathcal{P})} f(y)\, dy = \iint_{\mathcal{P}} f(\phi(x)) \left|\det D\phi(x)\right| dx$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue.

Exercice 4. Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $D(R)$ le disque fermé de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon R.

1) En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\displaystyle\iint_{D(R)} dxdy$.

2) (*) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ (i.e. E est l'intérieur d'une ellipse, bord inclus).

   En utilisant des « coordonnées elliptiques » appropriées, calculer $\displaystyle\iint_E dxdy$.

1. Attention, ce n'est pas une terminologie usuelle !