TD5. Intégrales multiples

version du 19/11/2018

Exercice 1. Soient $a < b$ et $c < d$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{R}$ le rectangle $[a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$.

1) Calculer $m = \iint_{\mathcal{R}} dx\, dy$ (c.-à-d. l'intégrale sur $\mathcal{R}$ de la fonction constante de valeur 1).
2) Calculer $J_1 = \iint_{\mathcal{R}} x\, dx\, dy$ et $J_2 = \iint_{\mathcal{R}} y\, dx\, dy$.
3) Calculer $x_{\mathcal{R}} = J_1/m$ et $y_{\mathcal{R}} = J_2/m$. Si l'on considère $\mathcal{R}$ comme une plaque homogène de densité constante égale à 1, alors m est la masse de la plaque et $x_{\mathcal{R}}$ et $y_{\mathcal{R}}$ sont les coordonnées de son centre d'inertie (ou centre de gravité) $I_{\mathcal{R}}$.
4) Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, calculer $I(p,q) = \iint_{\mathcal{R}} x^p y^q\, dx\, dy$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{R}$ le rectangle $[1,a] \times [1,b]$ de $\mathbb{R}^2$, où $a, b > 1$.

1) Calculer $J_{a,b} = \iint_{\mathcal{R}} \log(x)\log(y)\, dx\, dy$, où log désigne le logarithme népérien.
2) On prend $a = 2 = b$. Calculer $\iint_{\mathcal{R}} \log(x+y)\, dx\, dy$. (On doit trouver $9\log(4/3) - 3/2$.)

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit Δ le triangle de sommets $O = (0,0)$, $A = (a,0)$ et $B = (0,b)$.

1) Calculer $m = \iint_{\Delta} dx\, dy$.
2) Calculer les coordonnées x_Δ et y_Δ du centre d'inertie I_Δ de Δ.
3) Est-ce que I_Δ coïncide avec le centre de gravité (isobarycentre) G des points O, A, B ?
4) On prend maintenant juste les côtés du triangle (penser à un triangle en fil de fer). Déterminer le centre de gravité (c'est le barycentre des milieux des côtés, chacun affecté du poids égal à la longueur du côté).

Exercice 4. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ et soit T le tétraèdre de sommets $O = (0,0)$, $A = (a,0)$, $B = (0,b)$ et $C = (0,0,c)$.

1) Calculer $m = \iiint_T dx\, dy\, dz$.
2) Calculer les coordonnées x_T, y_T et z_T du centre d'inertie I_T de T.
3) Est-ce que I_T coïncide avec le centre de gravité (isobarycentre) G des points O, A, B, C ?

On admet le :

Théorème (Formule de changement de variables)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, $\mathcal{P}$ un pavé fermé contenu dans U, et $\mathring{\mathcal{P}}$ l'intérieur de $\mathcal{P}$ (i.e. le pavé ouvert correspondant). On suppose que la restriction de ϕ à $\mathring{\mathcal{P}}$ est un difféomorphisme de $\mathring{\mathcal{P}}$ sur son image. Alors, pour toute application continue $f : \phi(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}$ on a*

$$\iint_{\phi(\mathcal{P})} f(y)\, dy = \iint_{\mathcal{P}} f(\phi(x))\, \left|\det D\phi(x)\right| dx$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue.

Exercice 5. Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $D(R)$ le disque fermé de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon R.

1) En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\iint_{D(R)} dx\, dy$.
2) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ (i.e. E est l'intérieur d'une ellipse, bord inclus). En utilisant des « coordonnées elliptiques » appropriées, calculer $\iint_E dx\, dy$.

On rappelle le résultat suivant :

Théorème. *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g : [a,b] \times U \to \mathbb{R}, (s, x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(s, x_1, \ldots, x_n)$ une application continue. On suppose que, pour $i = 1, \ldots, n$, la dérivée partielle $\partial g / \partial x_i$ existe et est continue sur $[a,b] \times U$. Alors l'application*

$$G : [a,b] \times U \to \mathbb{R}, \qquad (t, x_1, \ldots, x_n) \mapsto \int_a^t g(s, x_1, \ldots, x_n) ds$$

est continue et est de classe C^1 sur l'ouvert $]a,b[\times U$: on a $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t, x_1, \ldots, x_n) = g(t, x_1, \ldots, x_n)$ et, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(t, x_1, \ldots, x_n) = \int_a^t \frac{\partial g}{\partial x_i}(s, x_1, \ldots, x_n) ds.$$

Exercice 6. Soient $a < b$ et $c < d$ dans $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : [a,b] \times [c,d] \times U \to \mathbb{R}, (s, t, x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(s, t, x_1, \ldots, x_n)$ une application continue. Pour tout $x \in U$ on pose :

$$\phi(x) = \int_c^d \left(\int_a^b f(s,t,x) ds \right) dt.$$

On fixe $x \in U$; pour tout $r \in [a,b]$ et $t \in [c,d]$ on pose $g(r,t) = f(r,t,x)$, puis pour $s \in [a,b]$ on pose :

$$G(s) = \int_c^d \left(\int_a^s g(r,t) dr \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^s f(r,t,x) dr \right) dt.$$

1) En utilisant le théorème rappelé plus haut, déterminer $G'(s)$ pour tout $s \in [a,b]$.
2) En utilisant le « théorème fondamental du calcul intégral » (vu en Terminale), montrer que :

$$\phi(x) = G(b) - G(a) = \int_a^b \left(\int_c^d f(s,t,x) dt \right) ds.$$

Exercice 7. Soient a, b dans $\mathbb{R}$ tels que $1 \leq a < b$ et soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$. Soit D la région du plan définie par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad x^p \leq y \leq x^q\}.$$

1) Faire un schéma représentant D.
2) Calculer $\displaystyle\iint_D dx\, dy$, puis $\displaystyle\iint_D x\, dx\, dy$ puis $\displaystyle\iint_D y\, dx\, dy$.