TD6. Intégrales multiples

version du 30/11/2018

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours ; ce sont des compétences attendues de tous et toutes. Les exercices avec (*) sont un peu plus avancés, et préparent parfois à des paragraphes ultérieurs du cours. Enfin, ceux avec (**) peuvent être considérés comme des compléments de cours et sont réservés aux étudiant(e)s les plus motivé(e)s.

Définition. Si A est une partie de $\mathbb{R}^2$ telle que $\iint_A f(x,y)\,dxdy$ existe pour toute fonction continue $f : A \to \mathbb{R}$, alors son **centre d'inertie** (ou centre de gravité) est le point G tel que

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_A x\,dxdy \qquad \text{et} \qquad y_G = \frac{1}{m}\iint_A y\,dxdy$$

où l'on a posé $m = \displaystyle\iint_A dxdy$. On a une définition analogue pour une partie A de $\mathbb{R}^3$, i.e. pour $i = 1,2,3$ la i-ème coordonnée $x_i(G)$ de G est donnée par $x_i(G) = \displaystyle\frac{1}{m}\iiint_A x_i\,dx_1dx_2dx_3$, où $m = \displaystyle\iiint_A dx_1dx_2dx_3$.

Exercice 1. Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme et $f : V \to \mathbb{R}$ une application continue.

1) Écrire la formule de changement de variables, exprimant $\int\cdots\int_V f(y)dy$ comme une certaine intégrale sur U, **en expliquant de façon précise** ce que sont les termes qui y figurent.

   Dans la suite de l'exercice, on prend $n = 3$ et l'on note (x,y,z) les coordonnées (au lieu de (x_1,x_2,x_3)).

2) Soient $\mathcal{B}$ un compact quarrable du plan horizontal d'équation $z = 0$ et α son aire, i.e. $\alpha = \iint_{\mathcal{B}} dx\,dy$. Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $c \neq 0$ et soit $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé des points $B + tu$, avec $B \in \mathcal{B}$ et $t \in [0,1]$. Montrer que $\mathcal{C}$ est l'image de $\mathcal{B} \times [0,1]$ par une application linéaire bijective $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que l'on précisera. Puis, en utilisant la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, calculer le volume de $\mathcal{C}$.

3) On suppose que $\mathcal{B} = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ et $u = (0,1,2)$. Pouvez-vous faire un dessin représentant $\mathcal{C}$? Quel est le volume de $\mathcal{C}$?

4) Introduire les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$, **en faisant un dessin** pour expliquer à quoi correspondent les angles introduits. Puis, fixant un réel $R > 0$, utiliser la formule de changement de variables et le théorème de Fubini pour calculer le volume de la boule euclidienne $\overline{B}(R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$.

5) Soient $a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$. Montrez que $\mathcal{E}$ est l'image de $\overline{B}(1)$ par une application linéaire bijective ϕ que l'on précisera. En utilisant la formule de changement de variables, déterminer le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E}$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ \sqrt{1-x^2} \leq y \leq h\}$, où h est un réel > 1.

1) Faire soigneusement un dessin représentant $\mathcal{P}$.
2) $\mathcal{P}$ est-il convexe ? Justifiez précisément votre réponse.
3) Déterminer l'aire α de $\mathcal{P}$.
4) Déterminer les coordonnées (x_G, y_G) du centre d'inertie G de $\mathcal{P}$.
5) Montrer que G appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $h \geq h_0$, pour un certain h_0 que l'on déterminera.
6) Donner une valeur approchée de $(h_0-1)^2$ et montrer que $h_0 < 3/2$.

Exercice 3. Soient $a, b, h \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $E = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} \leq 1\right\}$, i.e. E est l'intérieur d'une ellipse, bord compris.

1) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Montrer que l'application linéaire $L : (x,y) \mapsto (ax, by)$ établit une bijection de D sur E.

2) En utilisant la formule de changement de variables et en justifiant soigneusement son application, calculer l'aire de E, qu'on notera $\mathrm{vol}_2(E)$.

3) Soit A le centre d'inertie de E. Calculer les coordonnées u_A, v_A de A. (Il ne suffit pas de donner la réponse ; celle-ci doit reposer sur un calcul correct ou un raisonnement précis.)

   On identifie $\mathbb{R}^2$ au plan horizontal de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$. Soient I le point $(0,0,h)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}$ le cône de base E et de sommet I, i.e. $\mathcal{C}$ est la réunion, pour $p = (u,v)$ variant dans E, des segments

$$[p, I] = \big\{tp + (1-t)I = (tu, tv, (1-t)h) \mid t \in [0,1]\big\}$$

   i.e. $\mathcal{C}$ est l'image de $E \times [0,1]$ par l'application

$$\phi : (u,v,t) \mapsto \big(x(u,v,t), y(u,v,t), z(u,v,t)\big) = \big(tu, tv, (1-t)h\big).$$

4) En utilisant la formule de changement de variables et en justifiant soigneusement son application, exprimer le volume $\mathrm{vol}_3(\mathcal{C})$ en fonction de h et de $\mathrm{vol}_2(E)$.

5) Soit G le centre d'inertie de $\mathcal{C}$. Déterminer ses coordonnées x_G, y_G, z_G. (Penser à utiliser le théorème de Fubini.)

Exercice 4. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soient $\theta_1 < \theta_2$ dans $[0,\pi]$ et $\varphi_1 < \varphi_2$ dans $[-\pi,\pi]$. On pose

$$\mathcal{C} = \big\{\big(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)\big) \mid 0 \leq r \leq R, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\big\}$$

et l'on note G le centre d'inertie de $\mathcal{C}$.

1) En utilisant la formule de changement de variables, calculer le volume V de $\mathcal{C}$ puis les intégrales :

$$x_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{C}} x\,dxdydz, \qquad y_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{C}} y\,dxdydz, \qquad z_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{C}} z\,dxdydz.$$

2) Soit Σ l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la sphère de centre $O = (0,0,0)$ et de rayon R. En considérant $\mathcal{C}$ comme un « cône », pouvez-vous *suggérer* quelle est l'aire A de Σ ? Qu'obtient-on pour $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ et $\varphi_2 = \pi = -\varphi_1$?

3) (** à faire plus tard) Calculez, en le justifiant, l'aire de la surface paramétrée Σ. Cela est-il conforme à votre suggestion ?