TD7. Intégrales de chemins et formule de Green-Riemann

version du 30/11/2017

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours ; ce sont des compétences attendues de tous et toutes. Les exercices avec (*) sont un peu plus avancés, et préparent parfois à des paragraphes ultérieurs du cours. Enfin, ceux avec (**) peuvent être considérés comme des compléments de cours et sont réservés aux étudiant(e)s les plus motivé(e)s.

Exercice 1. Dire si les chemins (arcs paramétrés) $\Gamma = (\gamma, I)$ suivants sont de classe C^1. Tracer alors l'allure de la courbe qu'ils paramétrisent.

1) $\gamma(t) = (t^2, t^4)$, $I = [0, 1]$;
2) $\gamma(t) = (t, t^2)$, $I = [0, 1]$;
3) $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, at)$, $I = [0, 2\pi]$, $a > 0$, $R > 0$.

Exercice 2. Donner une paramétrisation décrivant chacun des arcs $\mathcal{C}$ suivants :

1) le segment de droite allant de $O = (0, 0)$ à $A = (a, b)$;
2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 4 = 0,\ y \geq 0\}$ (de quel objet géométrique s'agit-il ?) ;
3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y = 0\}$ (même question) ;
4) le triangle de sommets $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$.

Exercice 3. Soit Γ l'arc limité par les points $A(1, 0, 0)$ et $B(1, 0, 2\pi)$ de la trajectoire du mouvement dont le vecteur vitesse est $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

1) Déterminer une paramétrisation de Γ puis représenter Γ.
2) Soit $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la forme différentielle définie par $\omega(x, y, z) = (4xy, 3y^2, 5z)$. Calculer l'intégrale de ω le long de Γ

Exercice 4. Soit ω la forme différentielle xdy sur $\mathbb{R}^2$, i.e. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\omega(x, y)$ est la matrice ligne $(0, x)$.

1) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. En prenant une paramétrisation du cercle Γ_R de centre $(0, 0)$ et de rayon R, calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \omega$.
2) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Même question en remplaçant Γ_R par l'ellipse $\mathcal{C}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercice 5. Soient $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et $\omega : U \to \mathbb{R}$ la forme différentielle définie par

$$\omega(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-ydx + xdy) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x).$$

1) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et Γ_R le cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon R. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \omega$.
2) Soit Γ un chemin fermé simple dans U, entourant le point O. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma} \omega$ en appliquant la formule de Green-Riemann à un compact K dont le bord est ∂K est bien choisi. (Ceci est un analogue d'un théorème de Gauss en électromagnétisme.)