# TD7. Longueur d'un chemin paramétré

**version révisée du 4/12/2018**

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $C^1$. On dit que $\gamma$ est un chemin (ou arc) paramétré. Pour tout $t \in [a,b]$, on note $\|\gamma'(t)\|_2$ la norme euclidienne du vecteur dérivé $\gamma'(t)$ (pour $t = a$, resp. $t = b$, on prend la dérivée à droite, resp. à gauche). On note $\Gamma = \gamma([a,b])$ l'image de $\gamma$. Par exemple, si $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ pour $t \in [0, 4\pi]$, alors $\Gamma$ est le cercle unité parcouru deux fois dans le sens trigonométrique (ce n'est pas la même chose que le cercle parcouru une seule fois !). On définit la longueur de $\Gamma$ par :

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 \, dt.$$

Par exemple, si $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ pour $t \in [0, 4\pi]$, alors $\ell(\Gamma) = 4\pi$ (voir l'exercice 1).

**Exercice 1.** Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soient $\theta_1 < \theta_2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\Gamma$ la courbe obtenue en parcourant le cercle de centre $O = (0,0)$ et de rayon $R$ entre les points correspondant aux angles $\theta_1$ et $\theta_2$.

1) Donner une paramétrisation $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ de $\Gamma$.
2) Calculer $\ell(\Gamma)$.

**Exercice 2** (Longueur d'une portion d'hélice circulaire)**.** Soient $R, a, T \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ défini par $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, at)$. Tracer l'allure de $\Gamma = \gamma([0,T])$ et calculer sa longueur.

**Exercice 3** (Longueur d'un arc de parabole)**.** Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Soit $\gamma_1 : [0,T] \to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto (s, s^2)$. Tracer la courbe $\Gamma_1 = \gamma_1([0,T])$ et montrer que $\ell(\Gamma_1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2T} \sqrt{1+t^2}\, dt$.
2) Soit $\gamma_2 : [0, \sqrt{T}] \to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto (s^2, s^4)$. Tracer la courbe $\Gamma_2 = \gamma_2([0, \sqrt{T}])$ et montrer que $\ell(\Gamma_2) = \ell(\Gamma_1)$.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt$. En faisant une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a :
$$F(x) = x\sqrt{1+x^2} - \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = x\sqrt{1+x^2} - F(x) + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$
4) On note sh et ch les fonctions sinus et cosinus hyperboliques, et arcsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de sh. En utilisant le changement de variable $t = \mathrm{sh}(u)$, montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \mathrm{arcsh}(x)$.
5) En utilisant que $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{1+\mathrm{sh}(x)^2}$ et $e^x = \mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x)$, montrer que $\mathrm{arcsh}(y) = \log(y + \sqrt{1+y^2})$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, où log désigne le logarithme népérien.
6) Montrer que $\ell(\Gamma_1) = \dfrac{T}{2}\sqrt{1+4T^2} + \dfrac{1}{4}\log\big(2T + \sqrt{1+4T^2}\big)$.
7) En faisant directement le changement de variable $t = \mathrm{sh}(u)$, montrer que
$$\int_0^{2T} \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{4}\mathrm{sh}(2\,\mathrm{arcsh}(2T)) + \frac{1}{2}\mathrm{arcsh}(2T).$$
En utilisant la formule $\mathrm{sh}(2y) = 2\,\mathrm{sh}(y)\mathrm{ch}(y) = 2\,\mathrm{sh}(y)\sqrt{1+\mathrm{sh}(y)^2}$ et la question 5, retrouver le résultat de la question précédente.

**Exercice 4** (Longueur d'une hypocycloïde)**.** Soit $n$ un entier $\geq 2$. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ le chemin de classe $C^1$ défini par
$$\gamma(t) = \big(n\cos(t) + \cos(nt), n\sin(t) - \sin(nt)\big).$$

1) Soit $c$ la restriction de $\gamma$ à l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{2\pi}{n+1}\right]$, i.e. pour tout $t \in I$ on a $c(t) = \gamma(t)$. Calculer, en le justifiant, la longueur $L(c)$ de $c$. (On rappelle que $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$.)
2) Un calcul analogue donne la même longueur pour chaque morceau $\gamma\Big(\Big[\dfrac{2k\pi}{n+1}, \dfrac{2(k+1)\pi}{n+1}\Big]\Big)$, pour $k = 0, \ldots, n$. Donner alors la longueur totale du chemin $\gamma([0, 2\pi])$.

**Exercice 5** (Longueur d'une astroïde)**.** Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \Gamma(t) = \big(R\cos^3(t), R\sin^3(t)\big)$. (Cette courbe s'appelle une astroïde ; pour voir une jolie figure, cherchez « astroïde » sur internet.)

1) Montrer que pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leq \cos^3(t) + \sin^3(t) \leq \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Montrer de même que pour $t \in [\pi/2, \pi]$, on a $0 \leq \sin^3(t) - \cos^3(t) \leq 1$.
2) En tenant compte de la question précédente, dessinez soigneusement l'allure de la courbe paramétrée $\Gamma$.
3) Soit $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \Gamma(t)$ le premier quart de $\Gamma$. Calculer la longueur $L(\gamma)$ du chemin $\gamma$.
4) Un calcul analogue donne la même valeur pour la longueur de chaque quart de $\Gamma$. Donner alors la longueur totale de l'astroïde $\Gamma$.

**Exercice 6** (Longueur d'une arche de cycloïde)**.** Un cycliste roule sur une route rectiligne à vitesse constante $v > 0$. Ses roues sont de rayon $R$. On considère la situation dans un plan $(Oxy)$ où $Ox$ est horizontal et $Oy$ vertical. Soit $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ la courbe paramétrée donnant la trajectoire du point d'une des roues qui au temps $t = 0$ se trouve au point $(0, 0)$.

1) Montrer que la vitesse de rotation de la roue est $\omega = v/R$. (Soit $T$ le temps nécessaire pour que la roue fasse un tour ; montrer que $2\pi = \omega T$ et $vT = 2\pi R$.)
2) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\gamma(t) = (vt, R) - R\big(\sin(\omega t), R\cos(\omega t)\big)$.
3) En utilisant que $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$, montrer que $\|\gamma'(t)\|_2 = 2v\,|\sin(\omega t/2)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
4) Pour $T = 2\pi/\omega$ comme dans la question 1, calculer la longueur $L$ du chemin $\gamma([0, T])$.