TD8. Intégrales de chemins et formule de Green-Riemann

version du 18/12/2018 [1]

Exercice 1. Soit ω la forme différentielle $x\,dy$ sur $\mathbb{R}^2$, i.e. pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\omega(x,y)$ est la matrice $(0,x)$.

1) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. En prenant une paramétrisation du cercle Γ_R de centre $(0,0)$ et de rayon R, calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \omega$.
2) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Même question en remplaçant Γ_R par l'ellipse $\mathcal{C}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Exercice 2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $P, Q : U \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 et ω la forme différentielle $P\,dx + Q\,dy$.

1) On suppose que ω est *exacte*, i.e. qu'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = df$. Montrer que f est de classe C^2. Que vaut $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$? Justifier votre réponse.
2) Prenons $U = \mathbb{R}$ et $\omega = x\,dy$, c.-à-d. $\omega(x,y) = (0,x)$. Est-ce que ω est exacte ?

Exercice 3. Soient $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $\omega : U \to \mathbb{R}$ la forme différentielle définie par

$$\omega(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-ydx + xdy) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x).$$

1) Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et Γ_R le cercle de centre $O = (0,0)$ et de rayon R. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \omega$.
2) Soit Γ un chemin fermé simple dans U, entourant le point O. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma} \omega$ en appliquant la formule de Green-Riemann à un compact K dont le bord est ∂K est bien choisi. (Ceci est un analogue d'un théorème de Gauss en électromagnétisme.)

Exercice 4 (Aire d'une astroïde)**.** Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \Gamma(t) = \big(R\cos^3(t), R\sin^3(t)\big)$. Cette courbe s'appelle une astroïde ; pour voir une jolie figure, cherchez « astroïde » sur internet.)

1) Montrer que pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \le \cos^3(t) + \sin^3(t) \le \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Montrer de même que pour $t \in [\pi/2, \pi]$, on a $0 \le \sin^3(t) - \cos^3(t) \le 1$.
2) En tenant compte de la question précédente, dessinez soigneusement l'allure de la courbe paramétrée Γ.
3) Soit K le compact délimité par Γ. Déterminer l'aire de K en appliquant la formule de Green-Riemann à la forme différentielle $\omega(x,y) = \dfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$.
4) (*Cette question est indépendante de la précédente.*) Soit $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \Gamma(t)$ le premier quart de Γ. Calculer la longueur $L(\gamma)$ du chemin γ.
5) Un calcul analogue donne la même valeur pour la longueur de chaque quart de Γ. Donner alors la longueur totale de l'astroïde Γ.

Exercice 5. Soient $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $v : U \to \mathbb{R}$ le champ de vecteurs défini par $v(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Soit Γ_R le cercle de rayon $R > 0$, centré à l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer la circulation de v le long de Γ_R.

Exercice 6. Soit v le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par $v(x,y) = (2xy + e^y, x^2 + xe^y)$. Calculer la circulation de v le long de la parabole d'équation $x = y^2$ entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Exercice 7. Soit $a > 0$ et soit γ la lemniscate de Bernoulli, dont l'équation polaire est $r^2 = a^2\cos(2\theta)$ pour $0 \le \theta \le 2\pi$. Essayer de représenter cette courbe puis calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire ainsi délimitée.

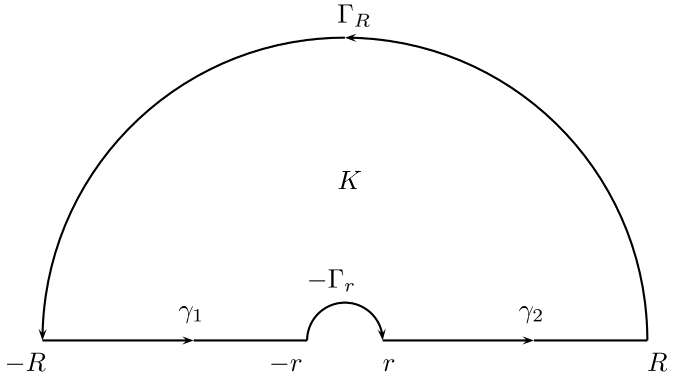
1. Correction d'une coquille dans l'exercice 10, question 2.

Exercice 8 (Examen 2e session 2017)**.** Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ la forme différentielle de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ définie par

$$P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\big(x\sin(x) - y\cos(x)\big), \qquad Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\big(x\cos(x) + y\sin(x)\big).$$

1) Pour tout $(x,y) \in U$, calculer $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ puis $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, *en présentant les résultats avec soin.* (Les réponses illisibles ne seront pas prises en compte.)

   Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^\times$ on note Γ_R le chemin $[0,\pi] \to U$ défini par $\Gamma_R(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \end{pmatrix}$. On fixe des réels r et R tels que $0 < r < 1 < R$ et l'on note K le compact de U représenté sur la figure suivante :



   i.e. le bord orienté de K est la somme des chemins orientés γ_1, γ_2, Γ_R et $-\Gamma_r$, où $\gamma_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $x \in [-R,-r]$ et $\gamma_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $x \in [r,R]$.

2) Montrer que $\int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_r} \omega - \int_{\Gamma_R} \omega$.

3) Montrer que $\int_{\gamma_2} \omega = \int_a^b g(x)\,dx$ pour des réels $a < b$ et une fonction g qu'on précisera.

Exercice 9. Soit n un entier ≥ 2. Soit $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ le chemin de classe C^1 défini par

$$\gamma(t) = \big(n\cos(t) + \cos(nt), n\sin(t) - \sin(nt)\big).$$

1) Soit ω la forme différentielle $\dfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ sur $\mathbb{R}^2$, i.e. pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\omega(x,y)$ est la matrice ligne $\dfrac{1}{2}(-y,x)$. Calculer $I = \displaystyle\int_\gamma \omega$.
2) On admet que γ est le bord orienté d'un compact K. En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'aire A de K.
3) Soit c la restriction de γ à l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{2\pi}{n+1}\right]$, i.e. pour tout $t \in I$ on a $c(t) = \gamma(t)$. Calculer, en le justifiant, la longueur $L(c)$ de c. (On rappelle que $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$.)

Exercice 10. Un cycliste roule sur une route rectiligne à vitesse constante $v > 0$. Ses roues sont de rayon R. On considère la situation dans un plan (Oxy) où Ox est horizontal et Oy vertical. Soit $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ la courbe paramétrée donnant la trajectoire du point d'une des roues qui au temps $t = 0$ se trouve au point $(0,0)$.

1) Montrer que la vitesse de rotation de la roue est $\omega = v/R$. (Soit T le temps nécessaire pour que la roue fasse un tour ; montrer que $2\pi = \omega T$ et $vT = 2\pi R$.)
2) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\gamma(t) = (vt, R) - \big(R\sin(\omega t), R\cos(\omega t)\big)$.
3) En utilisant que $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$, montrer que $\|\gamma'(t)\|_2 = 2v\,|\sin(\omega t/2)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
4) Pour $T = 2\pi/\omega$ comme dans la question 1, calculer la longueur L du chemin $\gamma([0,T])$.
5) $(**)$ Calculer l'aire du compact K compris entre le segment $[0,T]$ et le chemin $\gamma([0,T])$.