TD8. Intégrales de chemins, formule de Green-Riemann , longueur d'un chemin

version du 8/12/2017

Les exercices sans (*) sont des applications directes du cours ; ce sont des compétences attendues de tous et toutes. Les exercices avec (*) sont un peu plus avancés, et préparent parfois à des paragraphes ultérieurs du cours. Enfin, ceux avec (**) peuvent être considérés comme des compléments de cours et sont réservés aux étudiant(e)s les plus motivé(e)s.

Exercice 1. Soit ω la forme différentielle $x\,dy$ sur $\mathbb{R}^2$, i.e. pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\omega(x,y)$ est la matrice ligne $(0,x)$.

1) Soit $R\in\mathbb{R}_+^*$. En prenant une paramétrisation du cercle Γ_R de centre $(0,0)$ et de rayon R, calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_R}\omega$.
2) Soient $a,b\in\mathbb{R}_+^*$. Même question en remplaçant Γ_R par l'ellipse $\mathcal{C}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Exercice 2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $P,Q:U\to\mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 et ω la forme différentielle $P\,dx+Q\,dy$.

1) On suppose que ω est *exacte*, i.e. qu'il existe $f:U\to\mathbb{R}$ telle que $\omega=df$. Montrer que f est de classe C^2. Que vaut $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$? Justifier votre réponse.
2) Prenons $U=\mathbb{R}$ et $\omega=x\,dy$, c.-à-d. $\omega(x,y)=(0,x)$. Est-ce que ω est exacte ?

Exercice 3. Soient $U=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et $\omega:U\to\mathbb{R}$ la forme différentielle définie par

$$\omega(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}(-ydx+xdy)=\frac{1}{x^2+y^2}(-y,x).$$

1) Soit $R\in\mathbb{R}_+^*$ et Γ_R le cercle de centre $O=(0,0)$ et de rayon R. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_R}\omega$.
2) Soit Γ un chemin fermé simple dans U, entourant le point O. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma}\omega$ en appliquant la formule de Green-Riemann à un compact K dont le bord est ∂K est bien choisi. (Ceci est un analogue d'un théorème de Gauss en électromagnétisme.)

Exercice 4. Soient $U=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et $v:U\to\mathbb{R}$ le champ de vecteurs défini par $v(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$. Soit Γ_R le cercle de rayon $R>0$, centré à l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer la circulation de v le long de Γ_R.

Exercice 5. Soit v le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par $v(x,y)=(2xy+e^y,x^2+xe^y)$. Calculer la circulation de v le long de la parabole d'équation $x=y^2$ entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Exercice 6. [*] Soit $a>0$.

1) Soit γ_1 l'astroïde d'équations paramétriques

$$x(t)=a\cos^3 t,\quad y(t)=a\sin^3 t,\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Essayer de représenter cette courbe, puis calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire ainsi délimitée.

2) Soit γ_2 la lemniscate de Bernoulli, dont l'équation polaire est

$$r^2=a^2\cos(2\theta),\quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

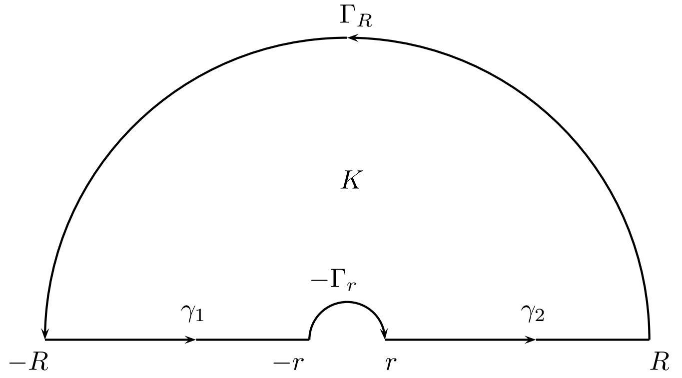
Essayer de représenter cette courbe puis calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire ainsi délimitée.

Exercice 7 (Examen 2e session 2017)**.** Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ la forme différentielle de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ définie par

$$P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\big(x\sin(x) - y\cos(x)\big), \qquad Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\big(x\cos(x) + y\sin(x)\big).$$

1) Pour tout $(x,y) \in U$, calculer $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ puis $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, *en présentant les résultats avec soin.* (Les réponses illisibles ne seront pas prises en compte.)

   Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^\times$ on note Γ_R le chemin $[0,\pi] \to U$ défini par $\Gamma_R(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos(\theta) \\ R\sin(\theta) \end{pmatrix}$. On fixe des réels r et R tels que $0 < r < 1 < R$ et l'on note K le compact de U représenté sur la figure suivante :



   i.e. le bord orienté de K est la somme des chemins orientés γ_1, γ_2, Γ_R et $-\Gamma_r$, où $\gamma_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $x \in [-R,-r]$ et $\gamma_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $x \in [r,R]$.

2) Montrer que $\int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_r} \omega - \int_{\Gamma_R} \omega$.

3) Montrer que $\int_{\gamma_2} \omega = \int_a^b g(x)\,dx$ pour des réels $a < b$ et une fonction g qu'on précisera.

Exercice 8. Un cycliste roule sur une route rectiligne à vitesse constante $v > 0$. Ses roues sont de rayon R. On considère la situation dans un plan (Oxy) où Ox est horizontal et Oy vertical. Soit $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ la courbe paramétrée donnant la trajectoire du point de la roue avant (disons) qui au temps $t = 0$ se trouve au point $(0,0)$.

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, déterminer $\gamma(t)$.
2) Pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, calculer la longueur du chemin $\gamma([0,T])$.