Examen du 19 janvier 2018 (durée 2h)

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les quatre exercices sont indépendants ; on pourra toujours admettre une question pour faire les suivantes. Cet examen est noté sur **50**. **Le sujet est volontairement long et le total des points est** > 60. Le barème donné (sur 61) est indicatif ; les notes > 50 seront comptées comme 50. Il sera tenu compte de **la précision, présentation et lisibilité** des arguments et calculs demandés. En particulier, les réponses illisibles ne seront pas prises en compte.

Exercice 1. — (22 pts) Tous les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels considérés sont munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dite *lipschitzienne* s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \leq C\,\|x - y\|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1) (2 pts) Montrer que si f est lipschitzienne, elle est continue.

Solution. — Supposons qu'il existe $C \geq 0$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \leq C\,\|x - y\|$ pour tout x, y. Si $C = 0$ alors f est constante, donc continue. On peut donc supposer $C > 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, si $\|x - y\| < \varepsilon/C$ on a $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Ceci montre que f est continue (et même uniformément continue). □

2) (2 pts) Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Montrer que u est lipschitzienne. *Indication : considérer la base canonique* $(e_1, \dots, e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *et poser* $C = \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|$.

Solution. — Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$ et l'inégalité triangulaire entraîne :

$$\|u(x)\| = \|\sum_{i=1}^n x_i u(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\;\|u(e_i)\| \leq \max(|x_i|)\;C$$

où l'on a posé $C = \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|$. On a donc $\|u(x)\| \leq C\,\|x\|$ puis, comme u est linéaire,

$$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leq C\,\|x - y\|$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ceci montre que u est lipschitzienne. □

Soient maintenant U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ une application différentiable. Soit $a \in U$. On suppose que l'application linéaire $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bijective et l'on note $df(a)^{-1}$ son inverse. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ de centre a et de rayon r soit contenue dans U.

3) (2 pts) Montrer qu'il existe une application continue $\varepsilon : B(a, r) \to \mathbb{R}^n$, nulle en a, telle que pour tout $x \in B(a, r)$ on ait :

$$x - a = df(a)^{-1}\big(f(x) - f(a)\big) - \|x - a\|\,df(a)^{-1}(\varepsilon(x)).$$

Indication : utiliser la définition de la différentiabilité de f *en* a *et appliquer* $df(a)^{-1}$.

Solution. — Comme f est différentiable en a, il existe une application continue $\varepsilon : B(a, r) \to \mathbb{R}^n$, nulle en a, telle que pour tout $x \in B(a, r)$ on ait :

$$f(x) - f(a) = df(a)(x - a) + \|x - a\|\,\varepsilon(x).$$

En appliquant l'application linéaire $df(a)^{-1}$ à cette égalité, on obtient

$$df(a)^{-1}\big(f(x) - f(a)\big) = x - a + \|x - a\|\,df(a)^{-1}\varepsilon(x)$$

d'où l'égalité désirée. □

4) (1 pt) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in B(a,r)$ on ait :

$$\|x-a\| \leq C\,\|f(x)-f(a)\| + C\,\|x-a\|\,\|\varepsilon(x)\|.$$

Solution. — Comme $df(a)^{-1}$ est linéaire alors, d'après la question (2), il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|df(a)^{-1}(y)\| \leq C\,\|y\|$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. L'inégalité demandée découle alors de la question précédente et de l'inégalité triangulaire. □

5) (1 pt) Montrer qu'il existe $\delta \in \,]0,r]$ tel que pour tout $x \in B(a,\delta)$ on ait $C\,\|\varepsilon(x)\| < 1/2$.

Solution. — Comme ε est continue et nulle en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(a,\delta)$ on ait $\|\varepsilon(x)\| < 1/2C$, d'où $C\,\|\varepsilon(x)\| < 1/2$. □

6) (1 pt) Montrer que pour tout $x \in B(a,\delta)$ on a $\|x-a\| \leq 2C\,\|f(x)-f(a)\|$.

Solution. — Pour tout $x \in B(a,\delta)$ on a donc :

$$\|x-a\| \leq C\,\|f(x)-f(a)\| + \frac{1}{2}\|x-a\|,$$

d'où $\dfrac{1}{2}\|x-a\| \leq C\,\|f(x)-f(a)\|$ et donc $\|x-a\| \leq 2C\,\|f(x)-f(a)\|$. □

On suppose de plus que $f : U \to V$ est un *homéomorphisme*, i.e. qu'elle est bijective et que l'application réciproque $g = f^{-1} : V \to U$ est continue.

7) (2 pts) Montrer que $W = f(B(a,\delta))$ est un ouvert de V contenant $b = f(a)$.

Solution. — Comme f est bijective, d'application réciproque $g = f^{-1}$, alors $W = f(B(a,\delta))$ égale

$$g^{-1}\big(B(a,\delta)\big) = \{y \in V \mid g(y) \in B(a,\delta)\}.$$

Donc, comme g est supposée continue, W est un ouvert de V. □

8) (2 pts) Montrer qu'il existe une application continue $\eta : W \to \mathbb{R}^n$, nulle en b, telle que pour tout pour tout $y \in W$ on ait :

$$\|g(y)-g(b)-df(a)^{-1}(y-b)\| \leq 2C\,\|y-b\|\,\|\eta(y)\|.$$

En déduire que g est différentiable en b et déterminer $dg(b)$.

Solution. — L'application $\eta = df(a)^{-1} \circ \varepsilon \circ g$ est continue et vérifie $\eta(b) = 0$. De plus, pour tout $y \in W$, le point $x = g(y)$ appartient à $B(a,\delta)$ et vérifie $f(x) = y$ donc d'après la question (3) on a :

$$g(y)-g(b) = df(a)^{-1}(y-b) - \|x-a\|\,df(a)^{-1}(\varepsilon(x)) = df(a)^{-1}(y-b) - \|x-a\|\,\eta(y).$$

Comme, d'après la question (6), on a $\|x-a\| \leq 2C\,\|f(x)-f(a)\| = 2C\,\|y-b\|$, on obtient donc

$$\|g(y)-g(b)-df(a)^{-1}(y-b)\| \leq 2C\,\|y-b\|\,\|\eta(y)\|.$$

Comme η est continue et nulle en b, ceci montre que g st différentiable en b, de différentielle $dg(b)$ égale à $df(a)^{-1}$. □

9) (Les questions a), b), c) sont indépendante de ce qui précède.) Soient $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > x_2\}$ et $V = \{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\}$ et soit $f : U \to V$, $(x_1,x_2) \mapsto (x_1+x_2, x_1x_2)$.

a) (2 pts) Montrer que f est différentiable et que $df(x_1,x_2)$ est inversible pour tout $(x_1,x_2) \in U$.

Solution. — Les composantes f_1 et f_2 de f sont des polynômes en x_1 et x_2, donc sont de classe C^1, donc f est de classe C^1. Pour tout $(x_1, x_2) \in U$, la matrice jacobienne de f en (x_1, x_2) est

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $x_1 - x_2$ qui est $\neq 0$ puisque $x_1 > x_2$. Donc $Df(x_1, x_2)$ est inversible. □

b) (3 pts) Montrer que f est une bijection de U sur V. *Indication :* x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $X^2 - sX + p = X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2$. Quel est le discriminant Δ de ce polynôme ? Peut-on exprimer x_1 et x_2 en fonction de s et Δ ?

Solution. — Le discriminant de ce polynôme est $s^2 - 4p$, qui est supposé > 0. Ce polynôme a donc deux racines réelles : $\dfrac{s \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ qui sont x_1 et x_2, et comme on suppose $x_1 > x_2$ on a nécessairement $x_1 = \dfrac{s + \sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{s - \sqrt{\Delta}}{2}$. Ceci montre que f est injective.

Réciproquement, pour tout $(s, p) \in V$, le couple (x_1, x_2) défini par les formules précédentes appartient à U et vérifie $f(x_1, x_2) = (s, p)$. Ceci montre que f est une bijection de U sur V. □

c) (2 pts) Soit $g : V \to U$ l'application réciproque de f. Montrer que g est continue.

Solution. — D'après ce qui précéde, on a $g(s, p) = \left(\dfrac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \dfrac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}\right)$. On voit ainsi que les deux composantes de g sont des fonctions continues de (s, p), donc g est continue. □

d) (2 pts) Montrer que g est différentiable.

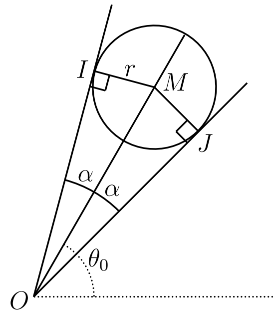
Solution. — On a montré que $f : U \to V$ est de classe C^1 et est un homéomorphisme, et que $df(a)$ est inversible pour tout $a \in U$. Donc, d'après la question (8), $g = f^{-1}$ est différentiable en tout point $b = f(a)$ de V, de différentielle $dg(b) = df(a)^{-1}$.

Remarque. On peut aussi voir que les composantes g_1 et g_2 admettent des dérivées partielles qui sont continues :

$$\frac{\partial g_1}{\partial s} = \frac{1}{2} + \frac{s}{2\sqrt{s^2 - 4p}}, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial p} = \frac{-1}{\sqrt{s^2 - 4p}}$$

et de même pour g_2. Ceci montre, de façon directe, que g est de classe C^1. □

Exercice 2. — (16 pts) Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$. On note O le point $(0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $M = (x, y) \neq O$ dans $\mathbb{R}^2$. On pose $R = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ et l'on fixe θ_0 tel que $M = (R\cos(\theta_0), R\sin(\theta_0))$ (θ_0 est unique modulo 2π). Soit $r \in \,]0, R[$ et soit Γ le cercle de centre M et de rayon r. On rappelle qu'il existe exactement deux demi-droites issues de O tangentes à Γ, cf. la figure ci-dessous.



1) (2 pts) En s'appuyant sur cette figure, montrer qu'il existe un angle $\alpha \in]0, \pi/2[$ dont on précisera le sinus, tel que le disque ouvert D de centre M et de rayon r soit contenu dans l'image par ϕ du rectangle ouvert $]R-r, R+r[\times]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[$.

Solution. — Soit $\alpha = \arcsin(r/R)$. Comme $r/R \in]0,1[$, on a $\alpha \in]0, \pi/2[$. On voit sur la figure que D est contenu dans le secteur angulaire délimité par $\theta_0 - \alpha$ et $\theta_0 + \alpha$ et est situé entre les cercles de centre O et de rayons $R - r$ et $R + r$. Ce dernier point se démontre aussi algébriquement comme suit : pour tout $\rho < r$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$ on a, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|Re^{i\theta_0} + \rho e^{i\varphi}| \leq R + \rho < R + r \qquad \text{et} \qquad |Re^{i\theta_0} + \rho e^{i\varphi}| \geq R - \rho > R - r.$$

(On rappelle que l'inégalité $\|u + v\| \geq \|u\| - \|v\|$ découle de : $\|u\| = \|u + v - v\| \leq \|u + v\| + \|v\|$.)
Ceci montre que $D \subset \phi(\mathcal{R})$, où $\mathcal{R} =]R - r, R + r[\times]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[$. □

2) (4 pts) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g(x, y)$ une application de classe C^1. On pose $f = g \circ \phi$, i.e. $f(r, \theta) = g(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) g admet un maximum (resp. minimum) local en un point $M = (x, y) = \phi(R, \theta) \neq O$,

(ii) f admet un maximum (resp. minimum) local en (R, θ).

Indication : pour l'implication (i) ⇒ (ii) utiliser la continuité de ϕ ; pour l'implication (ii) ⇒ (i), utiliser la question précédente.

Solution. — Supposons que g admette en $M = \phi(R, \theta) \neq O$ un maximum local. Il existe donc un ouvert U contenant M tel que $g(M) \geq g(p)$ pour tout $p \in U$. Comme ϕ est continue, il existe un ouvert V contenant (R, θ) tel que $\phi(V) \subset U$. Alors pour tout $q \in V$ on a $\phi(q) \in U$ et donc :

$$f(q) = g(\phi(q)) \leq g(M) = f(R, \theta).$$

Ceci montre que f admet en (R, θ) un maximum local. Le cas d'un minimum est analogue.

Supposons maintenant que f admette en (R, θ) un maximum local. Il existe donc un rectangle $\mathcal{R} =]R - r, R + r[\times]\theta - \alpha, \theta + \alpha[$ tel que $f(R, \theta) \geq f(q)$ pour tout $q \in \mathcal{R}$. D'après la question précédente, il existe un disque ouvert D centré en M et contenu dans $\phi(\mathcal{R})$. Alors, pour tout $p \in D$, il existe $q \in \mathcal{R}$ tel que $p = \phi(q)$ et l'on a donc :

$$g(p) = g(\phi(q)) = f(q) \leq f(R, \theta) = g(M).$$

Ceci montre que g admet en M un maximum local. Le cas d'un minimum est analogue. □

3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(r, \theta) = (r^2 - r)\sin(\theta)$.

a) (3 pts) Déterminer les dérivées partielles de f puis ses dérivées partielles secondes.

Solution. — On a $\dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = (2r-1)\sin(\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = (r^2-r)\cos(\theta)$, puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r,\theta) = 2\sin(\theta) \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -(r^2-r)\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r}(r,\theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}(r,\theta) = (2r-1)\cos(\theta).$$

□

b) (4 points) Déterminer les points critiques de f ; pour chacun d'eux écrire la matrice hessienne et déterminer si le point est ou non un maximum ou minimum local de f.

Solution. — $\dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$ s'annule ssi $r = 1/2$ ou $\sin(\theta) = 0$. Dans le 1er cas, $r^2 - r = -1/4$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$ ne peut s'annuler que si $\cos(\theta) = 0$, i.e. si $\theta = \pm\pi/2$ modulo 2π. Dans le 2ème cas, $\cos(\theta) = \pm 1$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$ ne peut s'annuler que si $r = 0$ ou $r = 1$; dans ce cas on a $2r - 1 = \pm 1$. Les points critiques et leur matrice hessienne sont donc les suivants. D'une part :

$$r = 0 \text{ ou } 1, \quad \sin(\theta) = 0, \qquad Hf(r,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$. Dans ce cas, le déterminant est $-\varepsilon^2 = -1$ donc il s'agit d'un point selle.

D'autre part :

$$r = \frac{1}{2}, \quad \cos(\theta) = 0, \qquad Hf(1/2,\theta) = \begin{pmatrix} 2\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta)/4 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, la matrice est diagonale et ses deux valeurs propres sont du même signe que $\sin(\theta)$ (qui vaut ± 1). Il s'agit donc d'un minimum si $\sin(\theta) = 1$, i.e. si $\theta = \pi/2$ modulo 2π, et d'un maximum si $\sin(\theta) = -1$, i.e. si $\theta = -\pi/2$ modulo 2π. □

c) (1 pt) Faire avec soin deux figures représentant le graphe des fonctions $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par $f_1(r) = f(r,\pi/2)$ et $f_2(r) = f(r,-\pi/2)$.

Solution. — On a $f_1(r) = r^2 - r = \big(r - \frac{1}{2}\big)^2 - \frac{1}{4}$. On obtient une (portion de) parabole, qui passe par 0 en $r = 0$, atteint son minimum $-1/4$ en $r = 1/2$, et tend vers $+\infty$ quand $r \to +\infty$.

De même, on a $f_2(r) = r - r^2 = -\big(r - \frac{1}{2}\big)^2 + \frac{1}{4}$. On obtient une (portion de) parabole, qui passe par 0 en $r = 0$, atteint son maximum $1/4$ en $r = 1/2$, et tend vers $-\infty$ quand $r \to +\infty$. □

4) (1 pt) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2} - 1)y$. En utilisant les questions précédentes, déterminer les extrema locaux de g sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Solution. — Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a :

$$g(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (r-1)r\sin(\theta) = (r^2 - r)\sin(\theta) = f(r,\theta).$$

Donc, d'après les deux questions précédentes, g admet sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ un unique maximum local, en le point $(x,y) = h(1/2,-\pi/2) = (0,-1/2)$, et un unique minimum local, en le point $(x,y) = h(1/2,\pi/2) = (0,1/2)$. □

5) (1 pt) Montrer de façon directe que $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un mimimum local de g.

Solution. — On a $g(0,0) = 0$ et pour $r \in]0,1[$, $g(x,y) = (r-1)y$ est > 0 si $y < 0$ et est < 0 si $y > 0$. Par conséquent, $(0,0)$ n'est ni un maximum ni un mimimum local de de g.

On peut aussi dire que, pour $y \neq 0$ on a :

$$\frac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = \sqrt{y^2} - 1 = |y| - 1$$

et ceci tend vers -1 lorsque y tend vers 0. Donc $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut -1, qui est $\neq 0$, donc $(0,0)$ n'est pas un extremum local de g. $\square$

Notation. On écrira $\iint$, resp. $\iiint$, resp. $\int\cdots\int$ pour désigner une intégrale double, resp. triple, resp. à plus de 4 variables.

Exercice 3. — (13 pts) Soient $\mathcal{P}$ un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\mathcal{P}$ et $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto \phi(u) = (\phi_1(u), \dots, \phi_n(u))$ une application de classe C^1. On pose $\mathcal{A} = \phi(\mathcal{P})$ et l'on suppose que la restriction de ϕ à l'intérieur de $\mathcal{P}$ est un C^1-difféomorphisme de l'intérieur de $\mathcal{P}$ sur l'intérieur de $\mathcal{A}$. On note α le volume de $\mathcal{A}$.

1) (2 pts) En utilisant la formule de changement de variables, exprimer α comme une certaine intégrale sur $\mathcal{P}$.

Solution. — D'après la formule de changement de variables, on a :

$$\alpha = \int\cdots\int_{\mathcal{A}} 1\, dx_1 \cdots dx_n = \int\cdots\int_{\mathcal{P}} |\text{dét}\, D\phi(u_1, \dots, u_n)|\, du_1 \cdots du_n$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue. $\square$

On identifie $\mathbb{R}^n$ au sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$ formé des éléments dont la dernière coordonnée est nulle, on fixe un point $S = (c_1, \dots, c_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $c_{n+1} > 0$, et l'on considère le « cône » $\mathcal{C}$ de base $\mathcal{A}$ et de sommet S : c'est la réunion pour $a \in \mathcal{A}$ des segments $[S,a]$ i.e. $\mathcal{C}$ est l'image de $\mathcal{P} \times [0,1]$ par l'application

$$\psi : \mathcal{P} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad (u,t) \mapsto \big(t\phi_1(u) + (1-t)c_1, \dots, t\phi_n(u) + (1-t)c_n, (1-t)c_{n+1}\big).$$

2) (2 pts) Pour tout $(u,t) \in \mathcal{P} \times [0,1]$, montrer que la matrice jacobienne $D\psi(u,t)$ est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t(\partial\phi_1/\partial u_1)(u) & \cdots & t(\partial\phi_1/\partial u_n)(u) & \phi_1(u) - c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t(\partial\phi_n/\partial u_1)(u) & \cdots & t(\partial\phi_n/\partial u_n)(u) & \phi_n(u) - c_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -c_{n+1} \end{array}\right)$$

Solution. — On a $\psi_i(u,t) = t\phi_i(u) + (1-t)c_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\psi_{n+1}(u,t) = (1-t)c_{n+1}$. On a donc, pour $j = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(u,t) = \begin{cases} t\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(u,t) & \text{pour } i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{pour } i = n+1 \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}(u,t) = \begin{cases} \phi_i(u) - c_i & \text{pour } i = 1, \dots, n \\ -c_{n+1} & \text{pour } i = n+1. \end{cases}$$

La matrice jacobienne $D\psi(u,t)$ a donc la forme indiquée. $\square$

3) (2 pts) Montrer que $\text{dét}\, D\psi(u,t) = -c_{n+1}t^n \text{dét}\, D\phi(u)$.

Solution. — Notons A la matrice $D\phi(u)$. En développant par rapport à la dernière ligne, on voit que : $\text{dét}\, D\psi(u,t) = -c_{n+1}\text{dét}\,(tA)$ et comme $\text{dét}\,(tA) = t^n\text{dét}\,(A)$ on obtient la formule demandée. $\square$

4) (3 pts) En utilisant la formule de changement de variables et le théorème de Fubini, exprimer le volume V de $\mathcal{C}$ en fonction de α et de c_{n+1}. (On rappelle que $c_{n+1} > 0$.)

Solution. — D'après la formule de changement de variables et la question précédente, on a

$$V = \int \cdots \int_{\mathcal{C}} dx_1 \cdots dx_{n+1} = \int \cdots \int_{\mathcal{P}\times[0,1]} |\text{dét}\, D\psi(u,t)|\, du_1 \cdots du_n dt$$
$$= c_{n+1} \int \cdots \int_{\mathcal{P}\times[0,1]} |\text{dét}\, D\phi(u)|\, t^n\, du_1 \cdots du_n dt.$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\int \cdots \int_{\mathcal{P}\times[0,1]} |\text{dét}\, D\phi(u)|\, t^n\, du_1 \cdots du_n dt = \int_0^1 \left(\int \cdots \int_{\mathcal{P}} |\text{dét}\, D\phi(u)|\, du_1 \cdots du_n \right) t^n\, dt$$
$$= \alpha \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{\alpha}{n+1}.$$

et donc $V = \dfrac{\alpha\, c_{n+1}}{n+1}$. $\square$

5) (4 pts) On suppose que pour $i = 1, \ldots, n$ on a : $\displaystyle\int \cdots \int_{\mathcal{A}} x_i\, dx_1 \cdots dx_n = 0$.

Soient $(g_1, \ldots, g_{n+1})$ les coordonnées du centre d'inertie G de $\mathcal{C}$, données pour $i = 1, \ldots, n+1$ par les formules

$$g_i = \frac{1}{V} \int \cdots \int_{\mathcal{C}} x_i\, dx_1 \cdots dx_{n+1}.$$

En utilisant la formule de changement de variables, la question (3) et le théorème de Fubini, exprimer chaque g_i en fonction de c_i.

Solution. — D'après la formule de changement de variables, la question (3) et le théorème de Fubini on a, pour $i = 1, \ldots, n$:

$$\frac{V g_i}{c_{n+1}} = \int \cdots \int_{\mathcal{P}\times[0,1]} \Big(t\phi_i(u) + (1-t)c_i \Big) |\text{dét}\, D\psi(u)|\, t^n\, du_1 \cdots du_n dt =$$
$$\int_0^1 \left(\int \cdots \int_{\mathcal{P}} \phi_i(u)\, |\text{dét}\, D\phi(u)|\, du_1 \cdots du_n \right) t^n\, dt + c_i \int_0^1 \left(\int \cdots \int_{\mathcal{P}} |\text{dét}\, D\phi(u)|\, du_1 \cdots du_n \right) (1-t)t^n\, dt$$
$$= \int_0^1 \left(\int \cdots \int_{\mathcal{A}} x_i\, dx_1 \cdots dx_n \right) t^n\, dt + c_i\, \alpha \int_0^1 (t^n - t^{n+1})\, dt.$$

Or par hypothèse $\displaystyle\int \cdots \int_{\mathcal{A}} x_i\, dx_1 \cdots dx_n$ vaut 0.[1] Comme

$$\int_0^1 (t^n - t^{n+1})\, dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

1. Ceci signifie que le centre d'inertie A de $\mathcal{A}$ est le point $0 = (0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$.

on obtient donc que
$$\frac{V g_i}{c_{n+1}} = \frac{\alpha\, c_i}{(n+1)(n+2)}.$$
Pour $i = n+1$, le calcul est analogue mais plus simple car le terme $t\phi_i(u)$ n'existe pas, donc on trouve directement que
$$\frac{V g_{n+1}}{c_{n+1}} = c_{n+1}\,\alpha \int_0^1 (t^n - t^{n+1})\,dt = \frac{\alpha\, c_{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$
Comme $V = \dfrac{\alpha\, c_{n+1}}{n+1}$ ceci donne $g_i = \dfrac{c_i}{n+2}$ pour $i = 1, \dots, n+1$. □

Exercice 4. — (10 pts) Soit n un entier ≥ 2. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ le chemin de classe C^1 défini par
$$\gamma(t) = \big(n\cos(t) + \cos(nt), n\sin(t) - \sin(nt)\big).$$
1) (4 pts) Soit ω la forme différentielle $\dfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ sur $\mathbb{R}^2$, i.e. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\omega(x, y)$ est la matrice ligne $\dfrac{1}{2}(-y, x)$. Calculer $I = \displaystyle\int_\gamma \omega$.

Solution. — Pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -n\sin(t) - n\sin(nt) \\ n\cos(t) - n\cos(nt) \end{pmatrix}$, donc
$$I = \frac{n}{2}\int_0^{2\pi} \Big(\sin(nt) - n\sin(t), n\cos(t) + \cos(nt)\Big) \begin{pmatrix} -\sin(t) - \sin(nt) \\ \cos(t) - \cos(nt) \end{pmatrix} dt$$
Le terme à l'intérieur de l'intégrale vaut
$$\begin{aligned} n\sin^2(t) - \sin^2(nt) + (n-1)\sin(nt)\sin(t) + n\cos^2(t) - \cos^2(nt) - (n-1)\cos(nt)\cos(t) \\ = (n-1)\big(1 - \cos((n+1)t)\big) \end{aligned}$$
donc
$$I = \frac{n^2 - n}{2}\int_0^{2\pi} \big(1 - \cos((n+1)t)\big)\,dt = \frac{n^2 - n}{2}\left[t - \frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{2\pi} = (n^2 - n)\pi.$$
□

2) (2 pts) On admet que γ est le bord orienté d'un compact K. En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'aire A de K.

Solution. — Pour la forme différentielle $\omega = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ donnée, on a $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\big(1 - (-1)\big) = 1$. Donc, d'après la formule de Green-Riemann on a
$$A = \iint_K 1\,dxdy = \int_\gamma \omega = \pi(n^2 - n).$$
□

3) (4 pts) Soit c la restriction de γ à l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{2\pi}{n+1}\right]$, i.e. pour tout $t \in I$ on a $c(t) = \gamma(t)$. Calculer, en le justifiant, la longueur $L(c)$ de c. (On rappelle que $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$.)

Solution. — On a $L(c) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt$, où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne. On a calculé $\gamma'(t)$ à la question 1) et l'on obtient donc, en tenant compte du rappel :

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\|^2 &= n^2\Big(\sin^2(t) + \sin^2(nt) + 2\sin(t)\sin(nt) + \cos^2(t) + \cos^2(nt) - 2\cos(t)\cos(nt)\Big)\\ &= n^2\Big(2 - 2\cos((n+1)t)\Big) = 4n^2\sin^2\left(\frac{(n+1)t}{2}\right).\end{aligned}$$

Pour $t \in \left[0, \dfrac{2\pi}{n+1}\right]$ on a $\sin\left(\dfrac{(n+1)t}{2}\right) \geq 0$ et donc la racine carrée de l'expression ci-dessous est $2n\sin\left(\dfrac{(n+1)t}{2}\right)$. On obtient donc, en posant $\alpha = 2\pi/(n+1)$:

$$L(c) = 2n\int_0^{\alpha} \sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) dt = 2n\left[\frac{-2\cos((n+1)t/2)}{n+1}\right]_0^{\alpha} = \frac{4n}{n+1}\big(-\cos(\pi) + \cos(0)\big)$$

d'où $L(c) = \dfrac{8n}{n+1}$.

Remarques. 1) Un calcul analogue montre que tous les morceaux $\gamma\Big(\Big[\dfrac{2k\pi}{n+1}, \dfrac{2(k+1)\pi}{n+1}\Big]\Big)$, pour $k = 0, \ldots, n$, ont la même longueur, donc la longueur totale du chemin $\gamma([0, 2\pi])$ est $8n$.

2) Si un cercle mobile C de rayon 1 roule (sans glisser) à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ de centre $(0, 0)$ de rayon $n + 1$ et si le centre de C se trouve au temps $t = 0$ au point $(n, 0)$, alors l'arc paramétré $\gamma([0, 2\pi])$ décrit la trajectoire du point de C qui se trouve au temps $t = 0$ au point $(n + 1, 0)$, lorsque le centre de C fait un tour complet. □